



Том 21
Номер 2

eISSN 2658-5782

2026

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

электронный
научный журнал

MULTIPHASE
SYSTEMS

online
journal

<https://multiphasesystems.online>



Институт
механики
им. Р.Р. Мавлютова



Плоские движения идеального газа без расширений со специальной термодинамикой

С.В. Хабиров✉

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Российская Федерация

E-mail: habirov@anrb.ru

Аннотация. Дифференциальные уравнения движения идеального газа с переменной энтропией и специальной термодинамикой являются переопределенной системой. Если значения термодинамических параметров лежат на кривой или один из параметров постоянен, то переопределенная система одна и та же для любого уравнения состояния. В плоском случае все решения были найдены двумя способами в специальных лагранжевых координатах. Первый способ приводит систему в инволюцию, когда получают конечное число дифференциальных следствий, не порождающих новых. Второй способ получает бесконечную переопределенную систему дифференциальных уравнений на вспомогательные величины, которые получены интегрированием дифференциальных следствий исходной системы. В настоящей работе уточняется второй способ получения восьми типов точных решений, которые зависят максимум от одной существенной произвольной функции одного аргумента и нескольких постоянных. В результате получены 8 типов решений переопределенной системы. Классификация проведена с точностью до бесконечной группы преобразований, допускаемых системой в лагранжевых переменных. Цель работы – получение дифференциальных следствий, которые можно интегрировать по времени и представить их в виде бесконечной переопределенной цепочки дифференциальных уравнений для вспомогательных функций. Для каждого типа решений показаны примеры гладкого движения частиц газа для любого значения времени. Траектории могут быть параболами, кривыми с переменной выпуклостью, окружностями, кривыми, колеблющимися возле прямой, линейно растущими спиралями, конечной частью степенной кривой с периодическими колебаниями на ней, гиперболами, спиралями, растущим по экспоненциально гиперболическому закону в специально распределенной термодинамической среде.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики; однопараметрическая термодинамика; плоские движения; интегрируемые условия совместности; общее решение

Финансирование: Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

Цитирование: Хабиров С.В. Плоские движения идеального газа без расширений со специальной термодинамикой. *Многофазные системы*. 2026;21(2):81–98.

The plane motions of the ideal gas without extension with the spetial thermodynamics

S.V. Khabirov✉

Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russian Federation

E-mail: habirov@anrb.ru

Abstract. The differential equations of a motion of the ideal gas with varying entropy and the spatial thermodynamics are an overdetermined system. If values the thermodynamic parameters lie on a curved line or one of the parameters is a constant then the overdetermined system is the same for any state equation. In the plane case all solutions were obtained by two ways in the spatial Lagrange coordinates. The first way leads the system in involution when we obtain the finite number differential consequences no generated new. The second way gives an infinite overdetermined system of differential equations for auxiliary values that were obtained by integration of differential consequences of the initial system. Here we correct the second way obtaining of eight types of the exact solutions maximum depending on one essential arbitrary function of one argument and several constants. The classification was led to within infinite group of transformations admitted by system in the Lagrange coordinates. The objective of the paper is obtaining differential consequences which may be integrated by the time and to represent them in the type of infinite overdetermined chain of differential equations for auxiliary functions. The examples of the smooth movement of a gas particle for any time were given for each type of the solutions. The trajectories maybe parabolas, curves with variable convexity, circles, curves oscillating alone side the straight line, linearly growing spirals, finite part of the power curve with the periodic vibrations on it, hyperbolas, spirals growing by exponentially hyperbolic law in the spatially distributed thermodynamic medium.

Keywords: equations of gas dynamics; one-parameter thermodynamics; plane motions; integrable compatibility conditions; general solution

Funding: The work was carried out with the support of the state budget under the state assignment 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

Cite: Khabirov SV. The plane motions of the ideal gas without extension with the spetial thermodynamics. *Multiphase Systems*. 2026;21(2):81–98.

1. Введение

Термодинамические величины p — давление, ρ — плотность, S — энтропия, T — температура, ε — удельная внутренняя энергия связаны тождеством $TdS = d\varepsilon + pd\rho^{-1}$. Если $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S)$ — уравнение состояния, то $T = \varepsilon_S$, $p = \rho^2 \varepsilon_\rho = f(\rho, S)$. Уравнения газовой динамики, полученные из законов сохранения массы, импульса и энергии, таковы

$$D\rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \rho D\vec{u} + \nabla p = 0, \quad D\varepsilon + p\rho^{-1} \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

где \vec{u} — скорость частицы в точке с вектором \vec{x} ; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент. Для остальных термодинамических величин следуют уравнения

$$Dp + \rho f_\rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad DT + \rho \varepsilon_S \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

$$DS = S_t + \vec{u} \cdot \nabla S = 0.$$

Если температура T постоянна, то переопределенная система тепловых движений

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad D\vec{u} + \nabla i = 0, \quad Di = 0$$

не приведена в инволюцию в трехмерном пространстве $R^3(\vec{x})$. Здесь $i = \varepsilon + p\rho^{-1} - TS$ — полный термодинамический потенциал. Если плотность ρ постоянна, то система та же с заменой $i \rightarrow \rho^{-1}p$ [1]. Система будет та же, если постоянны p [2] или ε , или неизоэнтropicское движение с термодинамическими параметрами, лежащими на кривой $p = p(\lambda)$, $\rho = \rho(\lambda)$, $S = S(\lambda)$, $T = T(\lambda)$, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$, где λ — параметр с заменой $i \rightarrow \int \rho^{-1} p' d\lambda$. Такие движения газа называют движениями со специальной термодинамикой [3]. Примеры исследований таких движений можно найти в работах [4–8].

В плоском случае $R^2(\vec{x})$ все решения переопределенной системы найдены двумя способами [1, 4]. Дифференциальные уравнения движения принимают следующий вид:

$$D\vec{u} + \nabla i = 0, \quad Di = (\partial_t + u\partial_x + v\partial_y)i = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = u_x + v_y = 0, \quad D\omega = 0, \quad \omega = v_x - u_y.$$

Здесь декартовы переменные $\vec{x} = (x, y)$; $\vec{u} = (u, v)$; ω — завихренность. В переменных Лагранжа t, ξ, η :

$$x_t = u, \quad y_t = v, \quad x(0) = \xi, \quad y(0) = \eta,$$

$$x_t(0) = u_0(\xi, \eta), \quad y_t(0) = v_0(\xi, \eta)$$

производные замены $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ связаны с производными обратной замены $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ равенствами $J_{\xi x} = y_\eta$, $J_{\xi y} = -x_\eta$, $J_{\eta x} = -y_\xi$, $J_{\eta y} = x_\xi$, $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$.

Уравнения плоских тепловых движений в лагранжевых переменных таковы:

$$i_t = 0, \quad \omega_t = 0, \quad J_t = J \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

$$Jx_{tt} + i_\xi y_\eta - i_\eta y_\xi = 0, \quad Jy_{tt} - i_\xi x_\eta + i_\eta x_\xi = 0,$$

Имеем три интеграла $i = i(\xi, \eta)$, $\omega = \omega(\xi, \eta)$, $J = 1$ и представления для начальной скорости и завихренности $0 = (u_x + v_y)|_{t=0} = u_{0\xi} + v_{0\eta} \Rightarrow u_0 = -\Psi_\eta$, $v_0 = \Psi_\xi$, $\omega = \Delta\Psi$.

Если $i = i_0$ — постоянная величина, то получаются уравнения изобарических движений:

$$x = \xi - t\Psi_\eta, \quad y = \eta + t\Psi_\xi, \quad \omega = \Delta\Psi, \quad \Psi_{\xi\xi}\Psi_{\eta\eta} = \Psi_{\xi\eta}^2.$$

Последнее уравнение Монжа–Ампера задает линейчатую поверхность

$$\Psi = \lambda - f(\lambda)\xi - g(\lambda)\eta, \quad f'(\lambda)\xi + g'(\lambda)\eta = 1,$$

где f, g — произвольные функции; λ — параметр.

Пусть $i(\xi, \eta) \neq \text{const}$, тогда рассмотрим замену лагранжевых переменных, сохраняющую площадь $i_\xi j_\eta - i_\eta j_\xi = 1$. Все решения этого уравнения образуют псевдогруппу. Обратная замена удовлетворяет такому же условию. Выполняются соотношения

$$i_\xi = \eta_j, \quad i_\eta = -\xi_j, \quad j_\xi = -\eta_i, \quad j_\eta = \xi_i.$$

Два уравнения из трех подмодели плоских тепловых движений линеаризуются [1, 4]:

$$x_{tt} + y_j = 0, \quad y_{tt} = x_j, \quad x_i y_j - x_j y_i = 1.$$

С помощью матрицы поворота на угол $-\frac{\pi}{2}$ система записывается в векторном виде:

$$\vec{x}_j = O\vec{x}_{tt}, \quad \vec{x}_i \cdot O\vec{x}_j = 1,$$

$$O = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Матрица O имеет свойства:

$$O^2 = -E, \quad O^T = O^{-1} = -O, \quad \text{tr}O = 0, \quad |O| = 1.$$

Система (1) допускает группу G преобразований:

- 1) переносы $t' = t + a_0$, $i' = i + b_0$, $j' = j + g(i)$, $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$;
- 2) галилеевы переносы $\vec{x}' = \vec{x} + t\vec{b}$;
- 3) вращения $\vec{x}' = \Lambda\vec{x}$, $\Lambda\Lambda^T = E$, $|\Lambda| = 1$;
- 4) растяжения $t' = at$, $j' = a^2j$, $i' = a^{-2}b^2i$, $\vec{x}' = b\vec{x}$;
- 5) отражения $t' = -t$, $y' = -y$, $j' = -j$.

Здесь $a_0, b_0, a, b, \vec{a}, \vec{b}, \Lambda$ — постоянные; $g(i)$ — произвольная функция. Эти замены переменных являются преобразованиями эквивалентности в выборе лагранжевых замен.

Решения переопределенной системы (1) разыскиваем с точностью до преобразований группы G . Приведение системы в инволюцию заключается в получении конечного числа дифференциальных следствий не порождающих новых, что было проделано в работе [1] с помощью дополнительной комплексной замены и аналитических компьютерных вычислений. В работе [4] исключаются производные по переменной j во всех дифференциальных следствиях. Получается частично интегрируемая цепочка уравнений. Далее исключаются производные по переменной i , что приводит к цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений. Определяются интегрируемые соотношения и все возможные представления решений по переменной t . Исследование каждого представления приводит к общему решению векторной системы. Конечной инволютивной системы здесь не получают. В этой работе есть опечатки, недоказанные утверждения и упущенные решения. Здесь исправлены все недостатки статьи [4]. Подробные доказательства утверждений, пример применения нового метода получения решений переопределенной системы дифференциальных уравнений требуют повторного вывода ранее полученных формул [4] и получения новых соотношений. Описаны движения частиц газа для всех решений.

2. Условия совместности подмодели

Исключение производной по j приводит к скалярному уравнению

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_2 = -1 = p_0.$$

Здесь и далее $\vec{x}_k = \vec{x}^{(k)}$ — производная порядка k по переменной t . Дифференцирование по j , исключение производных по j в силу (1) и интегрирование по t дают равенства

$$\vec{x}_i \cdot O\vec{x}_3 - \vec{x}_1 \cdot O\vec{x}_2 = q_0(i, j) = -\omega(i, j).$$

Здесь $\omega(i, j)$ — завихренность.

Дальнейшее дифференцирование по j , исключение производных по j в силу (1) и трижды дифференцирование по t скалярного уравнения дают равенства

$$\vec{x}_{1i} \cdot \vec{x}_3 = p_1, \quad 4p'_1 = q_{0j},$$

где штрихом обозначена производная по t .

По индукции доказываем цепочку равенств [4]:

$$(\vec{x}_{k+1})_i \cdot \vec{x}_{k+3} = p_{k+1}, \quad 4p'_{k+1} = p'''_k + q_{kj}, \quad (2)$$

$$(\vec{x}_k)_i \cdot O\vec{x}_{k+3} - (\vec{x}_{k+1})_i \cdot O\vec{x}_{k+2} = q_k, \quad (3)$$

$$q'_k = p_{kj}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где вспомогательные функции p_k — полиномы по t степени не выше $2k - 1$; q_k — полиномы по t степени не выше $2k$; штрих означает дифференцирование по t .

Дифференцирование по t равенства (2), где число k заменено на $k - 1$, совместно с (3) дает систему линейных уравнений для определения вектора $(\vec{x}_{k+1})_i$:

$$\begin{aligned} (x_{k+1})_i x_{k+2} + (y_{k+1})_i y_{k+2} &= p'_k - (\vec{x}_k)_i \cdot \vec{x}_{k+3}, \\ - (x_{k+1})_i y_{k+2} + (y_{k+1})_i x_{k+2} &= q_k - (\vec{x}_k)_i \cdot O\vec{x}_{k+3}. \end{aligned}$$

Отсюда находим $(\vec{x}_{k+1})_i$, если $(\vec{x}_{k+2})^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} (\vec{x}_{k+2})^2 (\vec{x}_{k+1})_i &= p'_k \vec{x}_{k+2} - q_k O\vec{x}_{k+2} - \\ &- p_k \vec{x}_{k+3} + ((\vec{x}_k)_i \cdot O\vec{x}_{k+2}) O\vec{x}_{k+3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Умножение на \vec{x}_{k+3} дает соотношение с производными только по t :

$$\begin{aligned} p_{k+1} (\vec{x}_{k+2})^2 &= p'_k \vec{x}_{k+2} \cdot \vec{x}_{k+3} - \\ &- q_k \vec{x}_{k+3} \cdot O\vec{x}_{k+2} - p_k (\vec{x}_{k+3})^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (4), где число k заменено на $k - 1$, дифференцируем по t . В силу соотношений (3), (5) производные по i сокращаются

$$\begin{aligned} &\vec{x}_{k+3} (p_k \vec{x}_{k+1}^2 - p_{k-1} \vec{x}_{k+2}^2) + \\ &+ O\vec{x}_{k+3} (q_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - p'_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2}) + \\ &+ \vec{x}_{k+2} (2p_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - p'_k \vec{x}_{k+1}^2) + \\ &+ O\vec{x}_{k+2} (q_k \vec{x}_{k+1}^2 - 2p_{k-1} \vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} - 2q_{k-1} \vec{x}_{k+1}^2) + \\ &+ \vec{x}_{k+1} (p''_{k-1} \vec{x}_{k+1}^2 - 2p'_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2}) + \\ &+ O\vec{x}_{k+1} (2q_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - q'_{k-1} \vec{x}_{k+1}^2) = 0. \end{aligned}$$

В силу тождеств

$$\vec{x}_{k+2}^2 \vec{x}_{k+1} = (\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2}) \vec{x}_{k+2} + (\vec{x}_{k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2}) O\vec{x}_{k+2},$$

$$(\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2})^2 + (\vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1})^2 = \vec{x}_{k+2}^2 \vec{x}_{k+1}^2$$

и равенства (5) следует линейное векторное уравнение для \vec{x}_{k+3} :

$$\begin{aligned} &(p_k \vec{x}_{k+1}^2 - p_{k-1} \vec{x}_{k+2}^2) \vec{x}_{k+3} + \\ &+ (q_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - p'_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2}) O\vec{x}_{k+3} = \\ &= (p'_k \vec{x}_{k+1}^2 + (2p_k - p''_{k-1}) \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - \\ &- q'_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2}) \vec{x}_{k+2} + \\ &+ ((p''_{k-1} - 2p_k) \vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} + q'_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - \\ &- q_k \vec{x}_{k+1}^2) O\vec{x}_{k+2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Равенство (6) определяет вектор \vec{x}_{k+3} . Если определитель системы равен нулю, то все коэффициенты при векторах равны нулю. Вместе с (5), где k заменено на $k - 1$, получим 5 равенств:

$$m^2 p_k = n^2 p_{k-1}, \quad q_{k-1} \cos \varphi + p'_{k-1} \sin \varphi = 0,$$

$$q'_{k-1} \sin \varphi - (p''_{k-1} - 2p_k) \cos \varphi = -\frac{m}{n} p'_k,$$

$$q'_{k-1} \cos \varphi + (p''_{k-1} - 2p_k) \sin \varphi = \frac{m}{n} q_k,$$

$$p_k m^2 + p_{k-1} n^2 = mn(p'_{k-1} \cos \varphi - q_{k-1} \sin \varphi).$$

Здесь $m = |\vec{x}_{k+1}|$, $n = |\vec{x}_{k+2}|$, $\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} = mn \cos \varphi$, $\vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} = mn \sin \varphi$. Исключая величины φ , mn^{-1} получим равенства на p_k, q_k :

$$\begin{aligned} 4p_k p_{k-1} &= p_{k-1}'^2 + q_{k-1}'^2, \\ 2p_k q_{k-1}' &= p_k' q_{k-1} + q_k p_{k-1}', \\ 2p_k(p_{k-1}'' - 2p_k) &= p_k' p_{k-1}' - q_k q_{k-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты системы (6) обозначим так:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p_k m^2 - p_{k-1} n^2, \\ \beta_1 &= mn(q_{k-1} \cos \varphi + p_{k-1}' \sin \varphi), \\ \alpha_0 &= p_k' m^2 - mn((p_{k-1}'' - 2p_k) \cos \varphi - q_{k-1}' \sin \varphi), \\ \beta_0 &= mn(q_{k-1}' \cos \varphi + (p_{k-1}'' - 2p_k) \sin \varphi) - q_k m^2. \end{aligned}$$

Систему (6) умножим скалярно на векторы \vec{x}_{k+2} и $O\vec{x}_{k+2}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{x}_{k+3} \cdot \vec{x}_{k+2} - \beta_1 \vec{x}_{k+3} \cdot O\vec{x}_{k+2} &= \alpha_0 \vec{x}_{k+2}^2, \\ \beta_1 \vec{x}_{k+3} \cdot \vec{x}_{k+2} + \alpha_1 \vec{x}_{k+3} \cdot O\vec{x}_{k+2} &= \beta_0 \vec{x}_{k+2}^2. \end{aligned}$$

Отсюда находим соотношения

$$\begin{aligned} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \vec{x}_{k+3}^2 &= (\alpha_0^2 + \beta_0^2) \vec{x}_{k+2}^2, \\ (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \vec{x}_{k+3} \cdot \vec{x}_{k+2} &= (\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1) \vec{x}_{k+2}^2, \\ (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \vec{x}_{k+3} \cdot O\vec{x}_{k+2} &= (\alpha_1 \beta_0 - \beta_1 \alpha_0) \vec{x}_{k+2}^2, \end{aligned}$$

с помощью которых уравнение (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} p_{k+1}(\alpha_1^2 + \beta_1^2) &= p_k'(\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1) - \\ &- q_k(\alpha_1 \beta_0 - \beta_1 \alpha_0) - p_k(\alpha_0^2 + \beta_0^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Запишем соотношение (5), где k заменено на $k-1$:

$$p_k m^2 + p_{k-1} n^2 = mn(p'_{k-1} \cos \varphi - q_{k-1} \sin \varphi). \quad (9)$$

В силу этого равенства коэффициенты уравнения (8) принимают вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 &= m^2 n^2 (p_{k-1}'^2 + q_{k-1}'^2 - 4p_k p_{k-1}), \\ \alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 &= m^2 p_k' (p_k m^2 - p_{k-1} n^2) - \\ &- 2mn^3 p_{k-1} ((2p_k - p_{k-1}'') \cos \varphi + q_{k-1}' \sin \varphi) - \\ &- m^3 n q_k (q_{k-1} \cos \varphi + p_{k-1}' \sin \varphi) + \\ &+ m^2 n^2 [(p_{k-1}' \cos \varphi - q_{k-1} \sin \varphi) \times \\ &\times ((2p_k - p_{k-1}'') \cos \varphi + q_{k-1}' \sin \varphi) + \\ &+ (p_{k-1}' \sin \varphi + q_{k-1} \cos \varphi) \times \\ &\times ((p_{k-1}'' - 2p_k) \sin \varphi + q_{k-1}' \cos \varphi)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_0 - \beta_1 \alpha_0 &= -m^2 q_k (p_k m^2 - p_{k-1} n^2) - \\ &- 2mn^3 p_{k-1} ((p_{k-1}'' - 2p_k) \sin \varphi + q_{k-1}' \cos \varphi) - \\ &- m^3 n p_k' (q_{k-1} \cos \varphi + p_{k-1}' \sin \varphi) + \\ &+ m^2 n^2 [(p_{k-1}' \cos \varphi - q_{k-1} \sin \varphi) \times \\ &\times ((p_{k-1}'' - 2p_k) \sin \varphi + q_{k-1}' \cos \varphi) - \\ &- (p_{k-1}' \sin \varphi + q_{k-1} \cos \varphi) \times \\ &\times ((2p_k - p_{k-1}'') \cos \varphi + q_{k-1}' \sin \varphi)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 + \beta_0^2 &= m^4 (p_k'^2 + q_k'^2) + \\ &+ 2m^3 n [(p_k' q_{k-1}' - q_k (p_{k-1}'' - 2p_k)) \sin \varphi - \\ &- (p_k' (p_{k-1}'' - 2p_k) + q_k q_{k-1}') \cos \varphi] + \\ &+ m^2 n^2 ((p_{k-1}'' - 2p_k)^2 + q_{k-1}'^2). \end{aligned}$$

Подставляя коэффициенты в (8) и используя соотношение (9), получим равенство, в котором m, n, φ сокращаются:

$$\begin{aligned} p_{k+1}(4p_k p_{k-1} - p_{k-1}'^2 - q_{k-1}'^2) - \\ - p_k ((p_{k-1}'' - 2p_k)^2 + q_{k-1}'^2) - \\ - p_{k-1} (p_k'^2 + q_k'^2) + q_{k-1} (p_k' q_{k-1}' - q_k (p_{k-1}'' - 2p_k)) + \\ + p_{k-1}' (p_k' (p_{k-1}'' - 2p_k) + q_k q_{k-1}') = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$k = 1, 2, \dots$

Заметим, что соотношение (10) тождественно выполнено в силу равенства (7).

Лемма 1. Вспомогательные величины $p_0 = -1$, $q_0(i, j)$, $p_k, q_k, k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют переопределенной цепочке равенств (2), (3), (10). В особом случае (7) по индукции следует $p_k = -\frac{1}{4^k} t^{2k}$, $q_k = \frac{1}{4^k} q_0^{2k+1}$.

3. Некоторые решения условий совместности

В общем случае (10) при $k = 1$ имеем уравнения $p_0 = -1$, $q_0(i, j)$, $4p_1' = q_0j$, $4p_2' = q_1j$, $q_1' = p_1j$, $p_2(4p_1 + q_0^2) + 4p_1^3 = p_1'^2 + q_1'^2 + 2q_0 q_1 p_1$. Отсюда определяются величины:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{4} t q_0j + p_{10}(i, j), q_1 = \frac{1}{8} t^2 q_0jj + t p_{10j} + q_{10}(i, j), \\ p_2 &= \frac{1}{96} t^3 q_0jjj + \frac{1}{8} t^2 p_{10jj} + \frac{1}{4} t q_{10j} + p_{20}(i, j). \end{aligned}$$

Последнее уравнение становится полиномиальным по свободной переменной t четвертой степени. Приравняв нулю коэффициент при t^4 , получим уравнение

$$\frac{q_0jjj}{q_0jj} = \frac{3q_0jj}{2q_0j} \Rightarrow q_0jj = -2D(i) |q_0j|^{3/2}.$$

Если $D = 0$, то $q_0 = C(i)j + C_0(i)$. При $C \neq 0$ преобразования эквивалентности делают $q_0 \sim C(i)j$. Если $D \neq 0$,

то $q_0 \sim C(i)(j^{-1} + C_0(i))$, $C \neq 0$. Покажем от противного, что $C = 0$.

При $q_0 = C(i)j$, приравнявая нулю коэффициенты при степенях t , определяем величины:

$$p_{10} = -\frac{1}{4}C^2(j^2 + p_{100}(i)j + p_{1000}(i)),$$

$$q_{10} = C^3\left(-\frac{1}{4}j^3 + \frac{1}{2}j^2 p_{100} + j\left(\frac{1}{4}p_{100}^2 + \frac{1}{2}p_{1000}\right) + q_{100}\right),$$

$$p_{20} = C^4\left(-\frac{1}{16}j^4 - \frac{3}{16}j^3 p_{100} - \frac{3}{16}j^2(p_{100}^2 + p_{1000}) - \frac{1}{2}j(q_{100} + \frac{1}{4}p_{100}p_{1000} + \frac{1}{8}p_{100}^3) + \frac{1}{16}p_{100}^2 p_{1000} - \frac{1}{2}q_{100}p_{100} - \frac{1}{16}p_{1000}^2\right).$$

Остается равенство $p_{20}C^2(p_{100}j + p_{1000}) - 4p_{10}^3 + \frac{1}{16}C^2 + q_{10}^2 + 2Cj q_{10} p_{10} = 0$, которое расщепляется по переменной j . Коэффициенты при степенях $j^k, k = 1, \dots, 6$ тождественно равны нулю. Остается равенство $C^2 + C^6(4q_{100} - p_{100}p_{1000})^2 = 0 \Rightarrow C = 0$ противоречие.

При $q_0 = C(j^{-1} + C_0)$ коэффициенты при степенях t определяют величины:

$$p_{10} = -\frac{1}{4}C^2(C_0^2 + C_1(i)j^{-1} + C_2(i)j^{-2}),$$

$$q_{10} = C^3\left(\frac{1}{4}C_0^3 + \frac{1}{4}C_2^2 j^{-3} + \frac{1}{4}C_0(2C_1 - C_0)j^{-1} + C_3 j^{-2}\right),$$

$$p_{20} = -\frac{1}{16}C^4(C_2^3 j^{-4} + C_2(8C_3 - C_1 C_2)j^{-3} + (C_1^2 + 2C_0(4C_3 - C_1) + C_0^2(1 - C_2))j^{-2} + (3C_1 - 2C_0)C_0^2 j^{-1} + C_0^4).$$

Остается равенство

$$p_{20}C^2(j^{-2}(C_2 - 1) + j^{-1}(C_1 - 2C_0)) + \frac{1}{16}C^6(C_0^2 + C_1 j^{-1} + C_2 j^{-2})^3 + \frac{1}{16}C^2 j^{-4} + C^6\left(\frac{1}{4}C_0^3 + \frac{1}{4}C_2^2 j^{-3} + \frac{1}{4}C_0(2C_1 - C_0)j^{-1} + C_3 j^{-2}\right)^2 - \frac{1}{2}C^6(j^{-1} + C_0)(C_0^2 + C_1 j^{-1} + C_2 j^{-2}) \times \left(\frac{1}{4}C_0^3 + \frac{1}{4}C_2^2 j^{-3} + \frac{1}{4}C_0(2C_1 - C_0)j^{-1} + C_3 j^{-2}\right) = 0,$$

которое расщепляется по переменной j . Коэффициенты при степенях $-6, -5$ тождественно равны нулю. Коэффициент при степени -4 дает равенство $C^2 + C^6(4C_3 + C_0 - C_1(C_2 + 1))^2 = 0 \Rightarrow C = 0$ противоречие.

Итак, доказали, что $q_0(i)$ — функция, зависящая только от i :

$$p_1 = p_{10}(i, j), \quad q_1 = t p_{10j} + q_{10}(i, j),$$

$$p_2 = \frac{1}{8}t^2 p_{10jj} + \frac{1}{4}t q_{10j} + p_{20}(i, j),$$

$$\left(\frac{1}{8}t^2 p_{10jj} + \frac{1}{4}t q_{10j} + p_{20}\right)(4p_{10} + q_0^2) + 4p_{10}^3 = (t p_{10j} + q_{10})^2 + 2q_0 p_{10}(t p_{10j} + q_{10}).$$

Приравнявая нулю коэффициент при t^2 , получим уравнение для $\bar{p}_{10} = p_{10} + \frac{1}{4}q_0^2$:

$$\bar{p}_{10} \bar{p}_{10jj} = 2\bar{p}_{10j}^2 \Rightarrow \bar{p}_{10j} = -C(i)\bar{p}_{10}^2.$$

Если $C = 0$, то $p_{10}(i), q_{10j}(4p_{10} + q_0^2) = 0, (p_{20} + p_{10}^2)(4p_{10} + q_0^2) = (q_{10} + q_0 p_{10})^2$.

При $4p_{10} + q_0^2 \neq 0$ получим $q_{10}(i), p_{20}(i)$.

При $p_{10} = -\frac{1}{4}q_0^2$ получим $q_{10} = \frac{1}{4}q_0^3, p_{20}(i, j)$.

Если $C \neq 0$, то

$$\bar{p}_{10} = (Cj + C_0)^{-1} \Rightarrow p_{10} \sim -\frac{1}{4}q_0^2 + Cj^{-1}.$$

Дальнейшее расщепление по t приводит к равенствам:

$$j q_{10j} + 2q_{10} = q_0\left(\frac{1}{2}q_0^2 - 2Cj^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{10} = \frac{1}{4}q_0^3 - 2Cq_0 j^{-1} + C^2 Q(i)j^{-2},$$

$$p_{20} = \frac{1}{4}C^3 Q^2 j^{-3} - \frac{1}{2}C^2(q_0 Q + 2)j^{-2} + \frac{3}{4}Cq_0^2 j^{-1} - \frac{1}{16}q_0^4.$$

При $k = 1$ получили 3 типа решений:

$$1^0. p_1 = p_{10}(i), q_1 = q_{10}(i), p_2 = p_{20}(i), 4p_{10} + q_0^2 \neq 0, (p_{20} + p_{10}^2)(4p_{10} + q_0^2) = (q_{10} + q_0 p_{10})^2.$$

$$2^0. p_1 = -\frac{1}{4}q_0^2, q_1 = \frac{1}{4}q_0^3, p_2 = p_{20}(i, j).$$

$$3^0. p_1 = -\frac{1}{4}q_0^2 + C(i)j^{-1}, C \neq 0,$$

$$q_1 = -Cj^{-2}\bar{t} + \frac{1}{4}q_0^3 - 2Cq_0 j^{-1}, \bar{t} = t - CQ,$$

$$p_2 = \frac{1}{4}Cj^{-3}\bar{t}^2 + \frac{1}{2}Cq_0 j^{-2}\bar{t} - C^2 j^{-2} + \frac{3}{4}Cq_0^2 j^{-1} - \frac{1}{16}q_0^4.$$

Продолжим получение решений для переопределенной системы с $k = 2$.

В случае 1^0 уравнения (2), (3), (10) дают $q_2 = q_{20}(i, j), p_3 = \frac{1}{4}t q_{20j} + p_{30}(i, j), p_3(4p_1 p_2 - q_1^2) = 4p_2^3 - 2p_2 q_1 q_2 + p_1 q_2^2 \Rightarrow q_{20j}(4p_1 p_2 - q_1^2) = 0$:

а) Если $4p_2 p_1 \neq q_1^2$, то $q_2(i), p_3(i), (p_1 p_3 - p_2^2)(4p_1 p_2 - q_1^2) = (q_2 p_1 - p_2 q_1)^2$, получим первый тип продолжения.

б) Если $4p_2 p_1 = q_1^2$, то при $p_1 \neq 0$ получим $p_2 = \frac{1}{4}q_1^2 p_1^{-1}, q_2 = \frac{1}{4}q_1^3 p_1^{-2}, p_3 = p_{30}(i, j), q_1 q_0 = 4p_1^2 \Rightarrow q_2 = 16p_1^4 q_0^{-3}, p_2 = 4p_1^3 q_0^{-2}, q_0 \neq 0$ — второй тип продолжения.

в) Если $p_1 = q_1 = 0$, то $p_2 = 0, q_0 \neq 0$, получим новый тип продолжения.

В случае 2^0 уравнения (2), (3), (10) дают

$$q_2 = tp_{20j} + q_{20}(i, j), \quad p_3 = \frac{1}{8}t^2p_{20jj} + \frac{1}{4}tq_{20j} + p_{30}(i, j),$$

$$p_3(4p_1p_2 - q_1^2) = 4p_2^3 + p_1q_2^2 - 2q_1q_2p_2.$$

Если $q_0 = 0$, то $p_1 = q_1 = p_2 = 0$ получим продолжение, как в 1^0 В).

Последнее уравнение расщепляем по t . Коэффициент при t^2 дает уравнение

$$\bar{p}_{20}\bar{p}_{20jj} = 2\bar{p}_{20}^2,$$

$$\bar{p}_{20} = p_{20} + \frac{1}{16}q_0^4, \quad q_0 \neq 0 \Rightarrow \bar{p}_{20j} = -D\bar{p}_{20}^2.$$

Если $D = 0$, то $p_2(i)$, $q_2 = q_{20}(i, j)$, $p_3 = \frac{1}{4}tq_{20j} + p_{30}(i, j)$. Дальнейшее расщепление по t дает $q_{20j}(p_2 + \frac{1}{16}q_0^4) = 0$, $p_{30}(4p_1p_2 - q_1^2) = 4p_2^3 + p_1q_{20}^2 - 2q_1q_{20}p_2$.

Если $4p_1p_2 \neq q_1^2$, то $q_2 = q_{20}(i)$, $p_3 = p_{30}(i)$, получим продолжение как в 1^0 а) или продолжение первого типа.

Если $4p_1p_2 = q_1^2$, то $p_2 = -\frac{1}{16}q_0^4$, $q_2 = \frac{1}{16}q_0^5$, $p_3 = p_{30}(i, j)$, получим продолжение как 1^0 б) или продолжение второго типа.

Если $D \neq 0$, то $p_2 \sim Cj^{-1} - \frac{1}{16}q_0^4$, $q_0 \neq 0$, $C \neq 0$. Уравнение (10) при $k = 2$ расщепляем по t . Коэффициент при t^2 тождественно равен нулю. Коэффициент при t дает уравнение $jq_{20j} + 2q_{20} = \frac{1}{8}q_0^5 - 2Cq_0j^{-1}$. В результате определяются величины q_{20} , p_{30} и продолжение другого типа:

$$q_2 = -Cj^{-2}\bar{t} - 2Cq_0j^{-1} + \frac{1}{16}q_0^5, \quad \bar{t} = t - Q,$$

$$p_3 = \frac{1}{4}Cj^{-3}\bar{t}^2 + \frac{1}{2}Cq_0j^{-2}\bar{t} - 4C^2q_0^{-2}j^{-2} + \frac{3}{4}Cq_0^2j^{-1} - \frac{1}{64}q_0^6.$$

При $k = 3$ определяются

$$q_3 = -\frac{1}{4}Cj^{-4}\bar{t}^3 - \frac{1}{2}Cq_0j^{-3}\bar{t}^2 + (8C^2q_0^{-2}j^{-3} - \frac{3}{4}Cq_0^2j^{-2})\bar{t} + q_{30}(i, j),$$

$$p_4 = \frac{1}{16}Cj^{-5}\bar{t}^4 + \frac{1}{8}Cq_0j^{-4}\bar{t}^3 + \left(-3C^2q_0^{-2}j^{-4} + \frac{3}{16}Cq_0^2j^{-3}\right)\bar{t}^2 + \frac{1}{4}\bar{t}q_{30j} + p_{40}(i, j).$$

Соотношение (10) уточняет представление

$$q_{30} = Q_0j^{-2} - Cq_0^3j^{-1} + \frac{1}{64}q_0^7,$$

$$p_{40} = \frac{1}{4}Cj^{-3} - \frac{1}{2}Q_0q_0j^{-2} + \frac{1}{2}Cq_0^4j^{-1} - \frac{1}{256}q_0^8.$$

Расщепление по j коэффициента при \bar{t} приводит к противоречию при степенях j^{-6} и j^{-4} .

В случае 3^0 определяются величины:

$$q_2 = -\frac{1}{4}Cj^{-4}\bar{t}^3 - \frac{1}{2}Cq_0j^{-3}\bar{t}^2 + \left(2C^2j^{-3} - \frac{3}{4}Cq_0^2j^{-2}\right)\bar{t} + q_{20}(i, j), \quad \bar{t} = t - CQ,$$

$$p_3 = \frac{1}{16}Cj^{-5}\bar{t}^4 + \frac{1}{8}Cq_0j^{-4}\bar{t}^3 + \left(\frac{3}{16}Cq_0^2j^{-3} - \frac{3}{4}C^2j^{-4}\right)\bar{t}^2 + \frac{1}{4}\bar{t}q_{20j} + p_{30}(i, j).$$

Уравнение (10) принимает вид:

$$p_3(4p_1p_2 - q_1^2) - 4p_2^3 - C^2j^{-4}p_2 - p_1\left(\frac{1}{2}Cj^{-3}\bar{t} + \frac{1}{2}Cq_0j^{-2}\right)^2 - p_1q_1^2 + q_1\left(-\frac{1}{2}C^2j^{-5}\bar{t} - \frac{1}{2}C^2q_0j^{-4} + 2p_2q_2\right) = 0$$

с многочленом степени 6 по t в левой части равенства.

Коэффициенты многочлена при степенях 4, 5, 6 тождественно равны нулю. Обнуление коэффициента при \bar{t}^3 дает уравнение $jq_{2j} + 2q_{20} = q_0^3\left(\frac{1}{8}q_0^2 - Cj^{-1}\right) \Rightarrow q_{20} =$

$$\frac{1}{16}q_0^5 - Cq_0^3j^{-1} + C^2Q_0j^{-2}.$$

Коэффициент при \bar{t}^2 определяет величину $p_{30} = C\left(C^2 + \frac{1}{4}\right)j^{-3} - \frac{1}{2}Q_0C^2q_0j^{-2} + \frac{5}{16}Cq_0^4j^{-1} - \frac{1}{64}q_0^6$.

Коэффициент при \bar{t} дает соотношение $C^2q_0^3(C^2 + 1) = 0 \Rightarrow q_0 = 0$.

Остается равенство $C^5j^{-6}Q_0^2 = 0 \Rightarrow Q_0 = 0$.

Уравнения (2) и (3) определяют представления для q_3 и p_4 как многочлены по t . Равенство (10) задается многочленом по t степени 12. Обнуление коэффициентов определяет решение:

$$p_0 = -1, \quad q_0 = 0, \quad p_1 = C(i)j^{-1} \neq 0,$$

$$q_1 = -C\bar{t}j^{-2}, \quad \bar{t} = t - Q(i), \quad p_2 = \frac{1}{4}C\bar{t}^2j^{-3} - C^2j^{-2},$$

$$q_2 = -\frac{1}{4}C\bar{t}^3j^{-4} + 2C^2\bar{t}j^{-3},$$

$$p_3 = \frac{1}{16}C\bar{t}^4j^{-5} - \frac{3}{4}C^2\bar{t}^2j^{-4} + C\left(C^2 + \frac{1}{4}\right)j^{-3},$$

$$q_3 = -\frac{1}{16}C\bar{t}^5j^{-6} + C^2\bar{t}^3j^{-5} - 3C\left(C^2 + \frac{1}{4}\right)\bar{t}j^{-4},$$

$$p_4 = \frac{1}{64}C\bar{t}^6j^{-7} - \frac{5}{16}C^2\bar{t}^4j^{-6} + \frac{3}{8}C\left(4C^2 + \frac{3}{2}\right)\bar{t}^2j^{-5} - C^2(C^2 + 1)j^{-4}.$$

В работе [9] доказано по индукции продолжение решения для любого k .

Рассмотрим продолжение решения цепочки нового типа:

$$p_0 = -1, q_0(i), p_1 = q_1 = 0 \Rightarrow p_2 = 0, q_2 = q_{20}(i, j).$$

Уравнения цепочки при $k = 2$ выполнены. Соотношения цепочки при $k = 3$ дают:

$$p_3 = \frac{1}{4}tq_{20j} + p_{30}(i, j), q_3 = \frac{1}{8}t^2q_{20jj} + tp_{30j} + q_{30}(i, j),$$

$$p_4 = \frac{1}{96}t^3q_{20jjj} + \frac{1}{8}t^2p_{30jj} + \frac{1}{4}tq_{30j} + p_{40}(i, j).$$

Соотношение (10) $p_4q_2^2 + 4p_3^3 = 2q_2q_3p_3$ расщепляем по переменной t и получим 4 равенства для определенных величин $q_{20}, q_{30}, p_{30}, p_{40}$:

$$q_{20}^2q_{20jjj} + 6q_{20}^3q_{20j} = 6q_{20}q_{20j}q_{20jj} \Rightarrow (q_{20}^{-1})_{jjj} = 0,$$

$$q_{20}^2p_{30jj} + 6p_{30}q_{20j}^2 = 2q_{20}(2q_{30j}p_{30j} + p_{30}q_{20jj}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (q_{20}^{-2}p_{30})_{jj} = 0,$$

$$q_{20}^2q_{30j} + 12p_{30}^2q_{20j} = 2q_{20}(q_{30}q_{20j} + 4p_{30}p_{30j}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (q_{20}^{-2}q_{30} - 4q_{20}^{-3}p_{30}^2)_j = 0,$$

$$q_{20}^2p_{40} + 4p_{30}^3 = 2q_{20}p_{30}q_{30}.$$

Если $q_{20} = 0$, то $q_2 = p_3 = 0, q_3 = q_{30}(i, j)$ – продолжение нового типа.

Если $q_2 = q_{20} \neq 0$, то либо $p_3 = p_{30}(i), q_3 = q_{30}(i), p_4 = p_{40}(i), p_{40}q_{20}^2 = 2p_{30}(q_{20}q_{30} - 2p_{30}^2)$ – продолжение по типу 1^0 , либо $p_3 \sim jC(i) \neq 0, q_3 = C\bar{t} + 4C^2q_2^{-1}j^2, \bar{t} = t + C_0(i), p_4 = 2C^2q_2^{-1}j\bar{t} + 4C^3q_2^{-2}j^3, q_4 = C^2q_2^{-1}\bar{t}^2 +$

$12C^3q_2^{-2}j^2\bar{t} + q_{40}(i, j), p_5 = 3C^3q_2^{-2}j\bar{t}^2 + \frac{1}{4}\bar{t}q_{40j} + p_{50}(i, j).$

Если $q_{20j} \neq 0$, то возможны два типа решений:

1) $q_{20} \sim C(i)j^{-1}, p_{30} = C_1(i)j^{-1} + C_2(i)j^{-2},$

$$q_{30} = Q(i)j^{-2} + 4C^{-1}(C_1j^{-1} + C_2^2j^{-3}),$$

$$p_{40} = 2C^{-2}(C_1j^{-1} + C_2j^{-2})(CQj^{-1} + 2(C_1 - C_2j^{-1})^2);$$

2) $q_{20} \sim C(i)(j^2 - C_0(i))^{-1}, p_{30} = (C_1j + C_2)q_{20},$

$$q_{30} = q_{20}(C_3q_{20} + 4(C_1j + C_2)^2),$$

$$p_{40} = 2q_{20}(C_1j + C_2)(C_3q_{20} + 2(C_1j + C_2)^2).$$

Таким образом, продолжение решения нового типа возможно с функциональной зависимостью от переменной j . Например, при $p_3 = C(i)j \neq 0$ соотношения цепочки при $k = 4$ дают:

$$q_3 = C\bar{t} + 4C^2q_2^{-1}j^2, \bar{t} = t + q_{30}(i),$$

$$p_4 = 2C^2q_2^{-1}j\bar{t} + 4C^3q_2^{-2}j^3,$$

$$q_4 = 2C^2q_2^{-1}\bar{t}^2 + 12C^3q_2^{-2}j^2\bar{t} + 16C^4q_2^{-3}j^4,$$

$$p_5 = 3C^3q_2^{-2}j\bar{t}^2 + 16C^4q_2^{-3}j^3\bar{t} + 16C^5q_2^{-4}j^5.$$

Покажем, что существует решение переопределенной цепочки (2), (3), (10) по типу 1^0a : $p_0 = -1, q_0(i), p_1(i), q_1(i), 4p_1 + q_0^2 \neq 0, (p_2(i) + p_1^2)(4p_1 + q_0^2) = (q_1 + q_0p_1)^2, q_2(i), 4p_1p_2 \neq q_1^2, (p_1p_3(i) - p_2^2)(4p_1p_2 - q_1^2) = (q_2p_1 - q_1p_2)^2 \Rightarrow 4p_1^2 \neq q_0q_1.$

При $k = 3, 4p_2p_3 \neq q_2^2 \Rightarrow 4p_2^2 \neq q_1q_2, q_3(i), (p_2p_4(i) - p_3^2)(4p_2p_3 - q_2^2) = (p_2q_3 - q_2p_3)^2.$ Пусть $p_k(i), q_k(i), 4p_kp_{k-1} \neq q_{k-1}^2, (p_{k-1}p_{k+1}(i) - p_k^2)(4p_kp_{k-1} - q_{k-1}^2) = (p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k)^2.$ Тогда $q_{k+1}(i, j), 4p'_{k+2} = q_{k+1,j} \Rightarrow p_{k+2} = \frac{1}{4}tq_{k+1,j} + p_{k+2,0}(i, j), p_{k+2}(4p_{k+1}p_k - q_k^2) = 4p_{k+1}^3 + p_kq_{k+1}^2 - 2q_kq_{k+1}p_{k+1}.$ Если $4p_{k+1}p_k \neq q_k^2 \Leftrightarrow 4p_k^2 \neq q_kq_{k-1},$ то расщепление по t дает $q_{k+1}(i), p_{k+2}(i).$ Доказали по индукции утверждение.

Лемма 2. Существует решение цепочки переопределенных равенств (2), (3), (10) вида $p_0 = -1, q_0(i), p_k(i), q_k(i), k = 1, 2, \dots$ Величины $p_{k+1}(i)$ определяются из равенств $(p_{k+1}p_{k-1} - p_k^2)(4p_{k-1}p_k - q_{k-1}^2) = (p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k)^2$ с условиями для $p_1, q_k: 4p_{k-1}p_k \neq q_{k-1}^2 \Leftrightarrow 4p_k^2 \neq q_kq_{k-1}, 4p_1 + q_0^2 \neq 0.$

Получим решение цепочки по типу 2^0 :

$$p_0 = -1, q_0(i) \neq 0, p_1 = -\frac{1}{4}q_0^2, q_1 = \frac{1}{4}q_0^3,$$

$$p_2 = -\frac{1}{16}q_0^4, q_2 = \frac{1}{16}q_0^5, p_3(i, j). \text{ Пусть } p_k = -\frac{1}{4^k}q_0^{2k},$$

$$q_k = \frac{1}{4^k}q_0^{2k+1}, p_{k+1}(i, j). \text{ Тогда } q_{k+1} = tp_{k+1,j} + q_{k+1,0},$$

$$p_{k+2} = \frac{1}{8}t^2p_{k+1,0j} + \frac{1}{4}tq_{k+1,0j} + p_{k+2,0}(i, j), (p_kp_{k+2} - p_{k+1}^2)(4p_kp_{k+1} - q_k^2) = (p_kq_{k+1} - q_kp_{k+1})^2.$$
 Если $4p_kp_{k+1} = q_k^2,$ то $p_{k+1} = -\frac{1}{4^{k+1}}q_0^{2k+2}, q_{k+1} = \frac{1}{4^{k+1}}q_0^{2k+3}, p_{k+2}(i, j)$ и индукционный переход доказан.

Лемма 3. Существует решение цепочки переопределенных равенств (2), (3), (10) вида $p_0 = -1, q_0(i), p_k(i) = -\frac{1}{4^k}q_0^{2k}, q_k(i) = \frac{1}{4^k}q_0^{2k+1}, k = 1, 2, \dots$

Переход с решения по типу $1^0(2^0)$ на решение по типу $2^0(1^0)$ возможен с некоторого номера $k.$ Решение, зависящее от переменной $j,$ цепочки переопределенных равенств, возможно, но для этого надо проверять бесконечное число условий совместности (10). Появление таких решений возможно, начиная с любого номера $k,$ т.е. неограниченное множество.

Для решений цепочки переопределенных равенств (2), (3), (10) равенства (6) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \vec{x}_{k+3}(p_{k-1}^2 + q_{k-1}^2 - 4p_kp_{k-1}) = \\ & = \vec{x}_{k+2}(p'_{k-1}(p''_{k-1} - 2p_k) - 2p_{k-1}p'_k + q'_{k-1}q_{k-1}) + \\ & + O\vec{x}_{k+2}(2q_kp_{k-1} + q_{k-1}(p''_{k-1} - 2p_k) - q'_{k-1}p'_{k-1}) - \\ & - \vec{x}_{k+1}(q_kq_{k-1} + 2p_k(p''_{k-1} - 2p_k) - p'_k p'_{k-1}) + \\ & + O\vec{x}_{k+1}(2p_kq'_{k-1} - q_kp'_{k-1} - q_{k-1}p'_k). \end{aligned} \tag{11}$$

Для доказательства надо применить оператор O к равенству (6), исключить $O\vec{x}_{k+3}: (\alpha_1^2 + \beta_1^2)\vec{x}_{k+3} = (\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0)\vec{x}_{k+2} + (\beta_0\alpha_1 - \alpha_0\beta_1)O\vec{x}_{k+2},$ а коэффициенты вычислить в силу равенства (9) и тождества $n\vec{x}_{k+1} =$

$m(\vec{x}_{k+2} \cos \varphi - O\vec{x}_{k+2} \sin \varphi)$, $n = |\vec{x}_{k+2}|$, $m = |\vec{x}_{k+1}|$, $\vec{x}_{k+2} \cdot \vec{x}_{k+1} = mn \cos \varphi$, $\vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} = mn \sin \varphi$.

4. Полиномиальные решения

Далее рассмотрим точные решения системы (1). При выводе формул (4), (5), (6) предполагалось $\vec{x}_{k+2} \neq 0$. Рассмотрим решения, когда нарушается это условие, т.е. решение — многочлен степени n по переменной t :

$$\vec{x} = \vec{P}_n(t) = t^n \vec{D}_n + \dots + \vec{D}_0,$$

где \vec{D}_k — функции переменных i и j . Подстановка представления решения в систему (1) дает тождества по переменной t :

$$\begin{aligned} t^n \vec{D}_{nj} + \dots + t^k \vec{D}_{kj} + \dots + \vec{D}_{0j} = \\ = n(n-1)t^{n-2} O\vec{D}_n + \dots + \\ + k(k-1)t^{k-2} O\vec{D}_k + \dots + 2\vec{D}_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (t^n \vec{D}_{ni} + \dots + t^k \vec{D}_{ki} + \dots + \vec{D}_{0i}) \times \\ \times (n(n-1)t^{n-2} \vec{D}_n + \dots + 2\vec{D}_2) = -1, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Расщепление по t векторного равенства (12) дает представления для коэффициентов \vec{D}_k в виде многочленов по переменной j :

$$\vec{D}_n = \vec{k}_n(i) \neq 0, \vec{D}_{n-1} = \vec{k}_{n-1}(i), \dots$$

$$\begin{aligned} \vec{D}_k = \vec{k}_k(i) + \dots + (k+2l) \dots (k+1) \frac{j^l}{l!} O^l \vec{k}_{k+2l} + \dots + \\ + \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n \dots (k+1)}{l!} j^l O^l \vec{k}_n, & n-2l_1 = k \\ \frac{(n-1) \dots (k+1)}{l!} j^l O^l \vec{k}_{n-1}, & k+1 = n-2l_1 \end{array} \right. \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{D}_0 = \vec{k}_0(i) + \dots + \frac{(2l)!}{l!} j^l O^l \vec{k}_{2l} + \dots + \\ + \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n!}{l!} j^l O^l \vec{k}_n, & n = 2l_1 \\ \frac{(n-1)!}{l!} j^l O^l \vec{k}_{n-1}, & n = 2l_1 + 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Расщепление по t скалярного равенства (12) дает соотношения:

$$\begin{aligned} t^{2n-2} : \vec{D}_{ni} \cdot \vec{D}_n = 0, \\ t^{2n-3} : (n-2) \vec{D}_{ni} \cdot \vec{D}_{n-1} + n \vec{D}_{n-1,i} \cdot \vec{D}_n = 0, \dots \\ t^{2n-l} : \vec{D}_{ni} \cdot \vec{D}_{n-l+2} (n-l+2)(n-l+1) + \dots + \\ + \vec{D}_{n-k,i} \cdot \vec{D}_{n-l+k+2} (n-l+k+2)(n-l+k+1) + \dots + \\ + \vec{D}_{n-l+2,i} \cdot \vec{D}_n n(n-1) = 0, \quad l < n, \\ t^n : \vec{D}_{ni} \cdot \vec{D}_2 + \dots + \vec{D}_{n-k,i} \cdot \vec{D}_{k+2} (k+2)(k+1) + \dots + \\ + \vec{D}_{2i} \cdot \vec{D}_n n(n-1) = 0, \\ t^{n-1} : \vec{D}_{n-1,i} \cdot \vec{D}_2 + \vec{D}_{n-2,i} \cdot \vec{D}_3 + \dots + \\ + \vec{D}_{1i} \cdot \vec{D}_n n(n-1) = 0, \dots \end{aligned}$$

$$t^0 : \vec{D}_{0i} \cdot \vec{D}_2 = -\frac{1}{2}.$$

Случай $n = 2$, $\vec{x} = t^2 \vec{D}_2 + t \vec{D}_1 + \vec{D}_0$:

$$\begin{aligned} \vec{D}_2 = \vec{k}_2(i) \neq 0, \vec{D}_1 = \vec{k}_1(i), \\ \vec{D}_0 = 2j O \vec{k}_2 + \vec{k}_0(i); \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{2i} = 0, \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{1i} = 0, \\ \vec{k}_2 \cdot (2j O \vec{k}_{2i} + \vec{k}_{0i}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{k}_{2i} \cdot O \vec{k}_2 = 0, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{0i} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует $\vec{k}_{2i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_2 \sim \vec{e}$, $\vec{e}^2 = 1$, $\vec{k}_1 = \alpha(i) O \vec{e} + K_1 \vec{e}$, $\vec{k}_0 = \beta(i) O \vec{e} - \frac{1}{2} i \vec{e} \Rightarrow$

$$\vec{x} \sim (t^2 - \frac{1}{2} i) \vec{e} + (t \alpha(i) + 2j) O \vec{e} \quad (13)$$

Случай $n = 3$, $\vec{x} = t^3 \vec{D}_3 + t^2 \vec{D}_2 + t \vec{D}_1 + \vec{D}_0$:

$$\begin{aligned} \vec{D}_3 = \vec{k}_3(i) \neq 0, \vec{D}_2 = \vec{k}_2(i), \\ \vec{D}_1 = 6j O \vec{k}_3 + \vec{k}_1(i), \\ \vec{D}_0 = 2j O \vec{k}_2 + \vec{k}_0(i); \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_{3i} = 0, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{3i} + 3 \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_{2i} = 0, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{2i} + 3 \vec{k}_3 \cdot (6j O \vec{k}_{3i} + \vec{k}_{1i}) = 0 \Rightarrow \vec{k}_{3i} \cdot O \vec{k}_3 = 0, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{2i} + 3 \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_{1i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_3 \sim \vec{e}, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{1i} + 3 \vec{e} \cdot (2j O \vec{k}_{2i} + \vec{k}_{0i}) = 0 \Rightarrow \vec{k}_{2i} = 0, \\ \vec{k}_2 = \vec{K}_2 = \text{const}, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{1i} + 3 \vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0, \vec{K}_2 \cdot \vec{k}_{0i} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует $\vec{k}_{1i} \vec{e} = 0 \Rightarrow \vec{k}_1 = \alpha(i) O \vec{e} + K_1 \vec{e}$, $\vec{D}_1 = (6j + \alpha) O \vec{e} + K_1 \vec{e}$, $\alpha \sim 0$, $\vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_0 = \beta(i) O \vec{e} + K_0 \vec{e}$, $\beta \cdot O \vec{e} \cdot \vec{K}_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{K}_2 = K_2 \vec{e} + \vec{K}_2 O \vec{e} \neq 0$, $\beta = -\frac{1}{2} \vec{K}_2^{-1} i + \vec{K}_0 \Rightarrow$

$$\vec{x} \sim (t^3 - 2j) \vec{e} + (t^2 + 6tj - \frac{1}{2} i) O \vec{e}. \quad (14)$$

Случай $n = 4$, $\vec{x} = t^4 \vec{D}_4 + t^3 \vec{D}_3 + t^2 \vec{D}_2 + t \vec{D}_1 + \vec{D}_0$:

$$\begin{aligned} \vec{D}_4 = \vec{k}_4(i) \neq 0, \vec{D}_3 = \vec{k}_3(i), \\ \vec{D}_2 = 12j O \vec{k}_4 + \vec{k}_2(i), \\ \vec{D}_1 = 6j O \vec{k}_3 + \vec{k}_1(i), \\ \vec{D}_0 = -12j^2 O \vec{k}_4 + 2j O \vec{k}_2 + \vec{k}_0(i), \\ \vec{k}_4 \cdot \vec{k}_{4i} = 0, \\ \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_{4i} + 2 \vec{k}_4 \cdot \vec{k}_{3i} = 0 \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{k}_{3i} = 0, \\ \vec{k}_{4i} \cdot (12j O \vec{k}_4 + \vec{k}_2) + 3 \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_{3i} + 6 \vec{k}_4 \cdot (12j O \vec{k}_{4i} + \vec{k}_{2i}) = \\ = 0 \Rightarrow \vec{k}_{4i} \cdot O \vec{k}_4 = 0 \Rightarrow \vec{k}_4 \sim \vec{e}, \\ \vec{k}_{3i} \cdot (12j O \vec{e} + \vec{k}_2) + 3 \vec{k}_{2i} \cdot \vec{k}_3 + 12 \vec{e} \cdot (6j O \vec{k}_{3i} + \vec{k}_{1i}) = 0 \Rightarrow \\ \vec{k}_{3i} \cdot O \vec{e} = 0 \Rightarrow \vec{k}_3 = \vec{K}_3 = \text{const}, \vec{e} \cdot \vec{k}_{2i} = 0, \\ \vec{K}_3 \cdot \vec{k}_{2i} + 4 \vec{e} \cdot \vec{k}_{1i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_2 = \alpha(i) O \vec{e} + K_2 \vec{e}, \\ \vec{D}_2 = (12j + \alpha) O \vec{e} + K_2 \vec{e} \Rightarrow \alpha \sim 0, \vec{e} \cdot \vec{k}_{1i} = 0, \\ t : \vec{k}_{1i} (12j O \vec{e} + \vec{K}_2) + 3 \vec{e} \vec{k}_{0i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_1 = \vec{K} = \text{const}, \\ \vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0, \vec{k}_{0i} \cdot (12j O \vec{e} + \vec{K}_2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{k}_{0i} \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow \\ \vec{k}_0 = \vec{K}_0 = \text{const} \Rightarrow \text{противоречие.} \end{aligned}$$

Случай $n = 5$, $\vec{x} = t^5 \vec{D}_5 + t^4 \vec{D}_4 + t^3 \vec{D}_3 + t^2 \vec{D}_2 + t \vec{D}_1 + \vec{D}_0$:

$$\begin{aligned} \vec{D}_5 = \vec{k}_5(i) \neq 0, \vec{D}_4 = \vec{k}_4(i), \\ \vec{D}_3 = 20j O \vec{k}_5 + \vec{k}_3(i), \\ \vec{D}_2 = 12j O \vec{k}_4 + \vec{k}_2(i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{D}_1 &= -60j^2\vec{k}_5 + 6jO\vec{k}_3 + \vec{k}_1(i), \\
 \vec{D}_0 &= -12j^2\vec{k}_4 + 2jO\vec{k}_2 + \vec{k}_0(i), \\
 t^8 : \vec{k}_5 \cdot \vec{k}_{5i} &= 0, \\
 t^7 : 3\vec{k}_4 \cdot \vec{k}_{5i} + 5\vec{k}_5 \cdot \vec{k}_{4i} &= 0 \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{k}_{4i} = 0, \\
 t^6 : 3\vec{k}_{5i} \cdot (20jO\vec{k}_5 + \vec{k}_3) + 6\vec{k}_4 \cdot \vec{k}_{4i} + 10\vec{k}_5 \cdot (20jO\vec{k}_{5i} + \vec{k}_{3i}) &= 0 \Rightarrow \vec{k}_{5i} \cdot O\vec{k}_5 = 0 \Rightarrow \vec{k}_5 \sim \vec{e}, \\
 3\vec{k}_4 \cdot \vec{k}_{4i} + 5\vec{e} \cdot \vec{k}_{3i} &= 0, \\
 t^5 : 3\vec{k}_{4i} \cdot (20jO\vec{e} + \vec{k}_3) + 6\vec{k}_{3i} \cdot \vec{k}_4 + 10\vec{e} \cdot (12jO\vec{k}_{4i} + \vec{k}_{2i}) &= 0 \Rightarrow \vec{k}_{4i} \cdot O\vec{e} = 0 \Rightarrow \vec{k}_4 = \vec{K}_4 = \text{const}, \\
 3\vec{K}_4 \cdot \vec{k}_{3i} + 5\vec{e} \cdot \vec{k}_{2i} &= 0, \\
 \vec{e} \cdot \vec{k}_{3i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_3 &= \alpha(i)O\vec{e} + K_3\vec{e}, \\
 \vec{D}_3 &= (20j + \alpha)O\vec{e} + K_3\vec{e} \Rightarrow \alpha \sim 0, \vec{e} \cdot \vec{k}_{2i} = 0, \\
 \vec{k}_3 &= K_3\vec{e}, \\
 t^4 : 3\vec{K}_4 \cdot \vec{k}_{2i} + 5\vec{e} \cdot \vec{k}_{1i} &= 0, \\
 t^3 : 3\vec{k}_{2i} \cdot (20jO\vec{e} + \vec{k}_3) + 6\vec{K}_4 \cdot \vec{k}_{1i} + 10\vec{e} \cdot (2jO\vec{k}_{2i} + \vec{k}_{0i}) &= 0 \Rightarrow \vec{k}_{2i} \cdot O\vec{e} = 0 \Rightarrow \vec{k}_2 = \vec{K}_2 = \text{const}, \\
 3\vec{K}_4 \cdot \vec{k}_{1i} + 5\vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} &= 0, \vec{e} \cdot \vec{k}_{1i} = 0, \\
 t^2 : \vec{K}_4 \cdot \vec{k}_{0i} &= 0, \\
 t : \vec{k}_{1i} \cdot (12jO\vec{K}_4 + \vec{K}_2) + 3\vec{k}_{0i} \cdot (20jO\vec{e} + K_3\vec{e}) &= 0, \\
 t^0 : \vec{k}_{0i} \cdot (12jO\vec{K}_4 + \vec{K}_2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{k}_{0i} \cdot O\vec{K}_4 = 0 \Rightarrow \vec{K}_4 = 0, O\vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0, \vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_{0i} = 0 \text{ противоречие.}
 \end{aligned}$$

Случай $n > 5$. Расщепление по t соотношений (12) дает:

$$\begin{aligned}
 t^{2n-2} : \vec{k}_n \cdot \vec{k}_{ni} &= 0, \\
 t^{2n-3} : (n-2)\vec{k}_{n-1} \cdot \vec{k}_{ni} + n\vec{k}_n \cdot \vec{k}_{n-1,i} &= 0 \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{k}_{n-1,i} = 0, \\
 t^{2n-4} : (n-2)(n-3)(n(n-1)jO\vec{k}_n + \vec{k}_{n-2}) \cdot \vec{k}_{ni} + (n-1)(n-2)\vec{k}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-1,i} + n(n-1)\vec{k}_n \cdot (n(n-1)jO\vec{k}_{ni} + \vec{k}_{n-2,i}) &= 0 \Rightarrow O\vec{k}_n \cdot \vec{k}_{ni} = 0 \Rightarrow \vec{k}_n \sim \vec{e}, (n-2)\vec{k}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-1,i} + n\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-2,i} = 0, \\
 t^{2n-5} : (n-2)(n-3)(n(n-1)jO\vec{e} + \vec{k}_{n-2}) \cdot \vec{k}_{n-1,i} + (n-1)(n-2)\vec{k}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-2,i} + n(n-1)\vec{e} \cdot ((n-1)(n-2)jO\vec{k}_{n-1,i} + \vec{k}_{n-3,i}) &= 0 \Rightarrow O\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-1,i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_{n-1} = \vec{K}_{n-1} = \text{const}, (n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-2,i} + n\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-3,i} = 0, \\
 \vec{e} \cdot \vec{k}_{n-2,i} = 0 \Rightarrow \vec{D}_2 &= (n(n-1)j + \alpha)O\vec{e} + K_{n-2}\vec{e}, \\
 \vec{k}_{n-2} &= \alpha(i)O\vec{e} + K_{n-2}\vec{e} \Rightarrow \alpha \sim 0, \vec{e} \cdot \vec{k}_{n-3,i} = 0, \\
 t^{2n-6} : (n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-3,i} + n\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-4,i} &= 0.
 \end{aligned}$$

Пусть верно предположение ($5 < l < n$):

$$\begin{aligned}
 t^{2n-l} : \vec{k}_{ki} = 0, k = n, \dots, n-l+4, \vec{e} \cdot \vec{k}_{n-l+3,i} &= 0, \\
 n\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-l+2,i} + (n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-l+3,i} &= 0. \\
 \text{Тогда имеем} \\
 t^{2n-l-1} : (n-2)(n-3)(n(n-1)jO\vec{e} + \vec{K}_{n-2}) \cdot \vec{k}_{n-l+3,i} + (n-1)(n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-l+2,i} + n(n-1)\vec{e} \cdot ((n-l+3)(n-l+2)jO\vec{k}_{n-l+3,i} + \vec{k}_{n-l+1,i}) &= 0 \Rightarrow (l-5)(2n-l)O\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-l+3,i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_{n-l+3} = \vec{K}_{n-l+3} = \text{const}, \\
 \vec{e} \cdot \vec{k}_{n-l+2,i} &= 0, \\
 n\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-l+1,i} + (n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-l+2,i} &= 0.
 \end{aligned}$$

Выполняется предположение индукции на следующем шаге. Это верно для

$$\begin{aligned}
 l \leq n+2 : \vec{k}_{ki} = 0, k = n, \dots, 2, \\
 \vec{e} \cdot k_{1i} = 0, n\vec{e} \cdot k_{0i} + (n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot k_{1i} &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t^{n-3} : 2(n(n-1)jO\vec{e} + \vec{K}_{n-2}) \cdot k_{1i} + (n-1)(n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{0i} &= 0 \Rightarrow O\vec{e} \cdot k_{1i} = 0 \Rightarrow k_{1i} = 0, \\
 \vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0, \vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{0i} &= 0, \\
 t^{n-4} : \vec{k}_{0i} \cdot (\vec{K}_{n-2} + n(n-1)jO\vec{e}) &= 0 \Rightarrow O\vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_{0i} = 0 \text{ противоречие.}
 \end{aligned}$$

Проделанные вычисления доказывают утверждение [4].

Теорема 1. Полиномиальные по времени решения системы (1) могут иметь степень только 2 (13) и 3 (14) с точностью до преобразований группы G .

5. Гармонические решения

В случае нулевых коэффициентов уравнения (6) в силу решения переопределенной системы (2), (3), (10) по типу 2^0 : $p_k = -4^{-k}q_0^{2k}$, $q_k = 4^{-k}q_0^{2k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, $q_0 = q_0(i)$, $p_0 = -1$ имеем $q_0^2\vec{x}_{k+1}^2 = 4\vec{x}_{k+2}^2$, $\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} = 0$, $q_0\vec{x}_{k+1}^2 = 2\vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} \Rightarrow 2\vec{x}_{k+2} = q_0O\vec{x}_{k+1}$.

Отсюда следует

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{C}(i, j) \cos(at) + O\vec{C} \sin(at), \quad 2\alpha = q_0.$$

Пусть для некоторого n решение системы (1) имеет гармоническое представление $\vec{x}^{(n+1)} = \vec{C}_1(i, j) \cos(at) + O\vec{C}_1 \sin(at)$. Тогда интегрированием получим:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= \vec{P}_n(t) + \vec{C}(i, j) \cos(at) + O\vec{C} \sin(at), \\
 \alpha^{n+1}C &= (-1)^l O^l C_1, \quad n = 4k - 1 + l, \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\vec{P}_n = t^n \vec{D}_n + \dots + \vec{D}_0(i, j).$$

Подстановка представления в систему (1) дает:

$$\begin{aligned}
 \vec{P}_{nj} &= O\vec{P}_{ntt}, \vec{C}_j + \alpha^2 O\vec{C} = 0 \Rightarrow \\
 \vec{C} &= C(i)(\vec{e}_0 \sin(\alpha^2 j) + O\vec{e}_0 \cos(\alpha^2 j)) = C\vec{e}(\alpha^2 j), \\
 \vec{e}_0^2 &= 1, \quad \vec{e}_0 = \text{const}, \quad \vec{e}^2 = 1, \\
 \vec{x} &= \vec{P}_n(t) + C(i)\vec{e}(\alpha^2 j - at), \\
 (\vec{P}_{ni} + C_i\vec{e} - CO\vec{e}(2\alpha j - t)\alpha') (\vec{P}_{ntt} - C\alpha^2\vec{e}) &= -1 \Rightarrow \\
 C\alpha'(2\alpha j - t)O\vec{P}_{ntt} + C_i\vec{P}_{ntt} &= C\alpha^2\vec{P}_{ni}, \\
 \vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} &= \alpha^2 CC' - 1 \Rightarrow \\
 C'\vec{P}_{ntt} &= C\alpha^2(CC'\alpha^2 - 1) \Rightarrow C' \neq 0, n \leq 2. \\
 \text{Если } n \leq 1, \text{ то } \vec{P}_1 &= t\vec{K}_1 + \vec{K}_0 \sim 0, \\
 \vec{x} &= C(i)\vec{e}(\alpha^2 j - at), \quad \alpha^2 CC' = 1. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Если $n = 2$, то $\vec{P}_2 = t^2\vec{D}_2 + t\vec{D}_1 + \vec{D}_0$, $\vec{D}_{2j} = 0$, $\vec{D}_{1j} = 0$, $\vec{D}_{0j} = 2O\vec{D}_2$, $4\vec{D}_2^2 = C\alpha^2(\alpha^2 CC' - 1)$, $C\alpha^2(\vec{D}_{2i}t^2 + \vec{D}_{1i}t + \vec{D}_{0i}) = 2C'\vec{D}_2 + 2C\alpha'(2\alpha - t)O\vec{D}_2 \Rightarrow \vec{D}_2 \sim \vec{e}_0$, $\vec{D}_1 = \vec{K}_1 + (\alpha^{-1})'O\vec{e}_0$, $C\alpha^2\vec{D}_{0i} = 2C'\vec{e}_0 + 4C\alpha\alpha'jO\vec{e}_0 \Rightarrow \alpha' = 0$, $\alpha \sim 1$,

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &\sim \vec{e}_0(t^2 + 2 \ln|C|) + 2jO\vec{e}_0 + C\vec{e}(j - t), \\
 i &= \frac{1}{2}C^2 - 4 \ln|C|. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Теорема 2. Гармонические по времени решения системы (1) могут быть только двух типов (16) и (17) с точностью до преобразований группы G [4].

6. Представления решений для вспомогательных функций, зависящих только от i

Рассмотрим цепочку равенств (11), где $p_k(i), q_k(i)$. Уравнение при $k = 1$ дифференцируем по t $k - 1$ раз, при $k = 2$ $k - 2$ раза и т.д. при $k - 1$ один раз. В результате получим k линейных однородных уравнений для величин $\vec{x}_{k+3}, O\vec{x}_{k+2}, \vec{x}_{k+1}$, которые должны иметь ненулевое решение. Значит, ранг матрицы из коэффициентов продифференцированных уравнений не больше двух. Если ранг равен 2, то от системы остается лишь два независимых уравнения:

$$\alpha_n \vec{x}_{n+3} + \beta_n O\vec{x}_{n+2} + \gamma_n \vec{x}_{n+1} = 0,$$

$$\alpha_m \vec{x}_{n+3} + \beta_m O\vec{x}_{n+2} + \gamma_m \vec{x}_{n+1} = 0.$$

Если $\alpha_n \beta_m - \alpha_m \beta_n \neq 0$, то $\vec{x}_{n+3} = \beta \vec{x}_{n+1}, O\vec{x}_{n+2} = \alpha \vec{x}_{n+1}$. Отсюда следует равенство $\beta \vec{x}_{n+1} = -\alpha^2 \vec{x}_{n+1} \Rightarrow \beta = -\alpha^2, \vec{x}_{n+3} = -\alpha^2 \vec{x}_{n+1}$. Полученное уравнение задает гармоническое представление решения, рассмотренное выше.

Если $\alpha_n \beta_m - \alpha_m \beta_n = 0$, то ранг матрицы равен 1 и есть только одно независимое уравнение $O\vec{x}_{n+2} = \alpha \vec{x}_{n+3} + \beta \vec{x}_{n+1} \Rightarrow O\vec{x}_{n+3} = \alpha \vec{x}_{n+4} + \beta \vec{x}_{n+2}, O\vec{x}_{n+1} = \alpha \vec{x}_{n+2} + \beta \vec{x}_n + \vec{C}(i, j) \Rightarrow$

$$\alpha^2 \vec{x}_{n+4} + (2\alpha\beta + 1)\vec{x}_{n+2} + \beta^2 \vec{x}_n = -\beta \vec{C}. \quad (18)$$

При $\beta = 0$ уравнение (18) задает гармоническое представление решения. Экспоненциальное решение $e^{\lambda t}$ линейного однородного уравнения (18) имеет характеристические числа

$$\lambda^2 = \frac{1}{2\alpha^2} \left(-2\alpha\beta - 1 \pm \sqrt{4\alpha\beta + 1} \right).$$

При $4\alpha\beta + 1 = 0$ двухкратные мнимые характеристические числа $\lambda^2 = -\frac{1}{4}\alpha^{-2}$ задают представление решения линейно растущих гармоник

$$\vec{x} = \vec{P}_n(t) + (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \sin \frac{t}{2\alpha} + (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \cos \frac{t}{2\alpha}. \quad (19)$$

При $4\alpha\beta + 1 = \mu^2$ характеристические числа $\lambda = \pm \frac{\mu \mp 1}{2\alpha} \sqrt{-1}$ задают бигармоническое представление решения

$$\vec{x} = \vec{P}_n(t) + \vec{C}_1 \cos \left(\frac{\mu - 1}{2\alpha} t \right) + \vec{C}_2 \sin \left(\frac{\mu - 1}{2\alpha} t \right) + \vec{C}_3 \cos \left(\frac{\mu + 1}{2\alpha} t \right) + \vec{C}_4 \sin \left(\frac{\mu + 1}{2\alpha} t \right). \quad (20)$$

При $4\alpha\beta + 1 = -\mu^2$ характеристические числа $\lambda = \pm \frac{\mu \mp \sqrt{-1}}{2\alpha}$ задают представление решения экспоненци-

ально растущих гармоник

$$\vec{x} = \vec{P}_n(t) + \left(\vec{C}_1 e^{\frac{\mu t}{2\alpha}} + \vec{C}_2 e^{-\frac{\mu t}{2\alpha}} \right) \sin \frac{t}{2\alpha} + \left(\vec{C}_3 e^{\frac{\mu t}{2\alpha}} + \vec{C}_4 e^{-\frac{\mu t}{2\alpha}} \right) \cos \frac{t}{2\alpha}. \quad (21)$$

Лемма 4. Цепочка векторных равенств (11), где $p_k(i), q_k(i)$, имеет следующие представления решений по времени: гармонические (15), линейно растущие гармоника (19), бигармонические (20), экспоненциально растущие гармоника (21) [4].

7. Линейно растущие гармоника

Подставим представление решений (19) в виде линейно растущих гармоник в систему (1). Линейное векторное равенство расщепляем по гармоническим функциям и времени $\vec{C}_{1j} = -\frac{1}{4\alpha^2} O\vec{C}_1, \vec{C}_{3j} = -\frac{1}{4\alpha^2} O\vec{C}_3, \vec{C}_{2j} = -\frac{1}{\alpha} O\vec{C}_3 - \frac{1}{4\alpha^2} O\vec{C}_2, \vec{C}_{4j} = \frac{1}{\alpha} O\vec{C}_1 - \frac{1}{4\alpha^2} O\vec{C}_4$.

Решение представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{C}_1 &\sim n_1(i) \vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} \right), \\ \vec{C}_3 &= n_3(i) \vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} - \varphi_3(i) \right), \\ \vec{C}_2 &= -\frac{1}{\alpha} j O\vec{C}_3 + n_2(i) \vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} - \varphi_2(i) \right), \\ \vec{C}_4 &= \frac{1}{\alpha} j O\vec{C}_1 + n_4(i) \vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} - \varphi_4(i) \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\vec{e}(\psi) = \vec{e}_0 \sin \psi + O\vec{e}_0 \cos \psi, \vec{e}_\psi = -O\vec{e}, \vec{e}(j - \varphi) = \vec{e}(j) \cos \varphi + O\vec{e}(j) \sin \varphi$.

Равенства (1) после расщепления по гармоническим функциям сводится к соотношениям:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{nj} &= O\vec{P}_{ntt}, \\ \vec{P}_{ni} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_1 - \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right) &= \\ = \vec{P}_{ntt} \cdot \left(\frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) - (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4)_i \right), & \quad (23) \\ \vec{P}_{ni} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_3 + \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) &= \\ = \vec{P}_{ntt} \cdot \left(\frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) + (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2)_i \right); & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \left(\vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1 \right) &= \left((\vec{C}_1 t + \vec{C}_2)_i + \right. \\ + \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \left. \right) \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_3 + \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) & - \\ - \left((\vec{C}_3 t + \vec{C}_4)_i - \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) \times & \\ \times \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_1 - \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right); & \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left((\vec{C}_1 t + \vec{C}_2)_i + \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_1 - \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right) = \\
 & = \left((\vec{C}_3 t + \vec{C}_4)_i - \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_3 + \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right), \\
 & \left((\vec{C}_1 t + \vec{C}_2)_i + \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_3 + \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) = \\
 & = \left((\vec{C}_3 t + \vec{C}_4)_i - \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) \times \\
 & \times \left(-\frac{1}{\alpha} \vec{C}_1 + \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right).
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Расщепляя по t соотношения (25), получим:

$$\begin{aligned}
 & \alpha' \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3 = 0, \alpha' (\vec{C}_1^2 - \vec{C}_3^2) = 0, \\
 & (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3)_i = \frac{\alpha'}{\alpha^2} (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4), \\
 & (\vec{C}_1^2 - \vec{C}_3^2)_i + 2 \frac{\alpha'}{\alpha^2} (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 + \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3) = 0, \\
 & (\vec{C}_1^2 - \vec{C}_3^2)_i - \frac{1}{2\alpha} (\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3 + \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4)_i + \\
 & + \frac{\alpha'}{4\alpha^3} (\vec{C}_2^2 - \vec{C}_4^2) + \frac{\alpha'}{\alpha^2} (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 + \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3) = 0, \\
 & \frac{1}{2\alpha} (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4)_i + 2 (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3)_i + \\
 & + \frac{\alpha'}{4\alpha^3} \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4 + \frac{\alpha'}{\alpha^2} (\vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4 - \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2) = 0, \\
 & \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{2i} - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{4i} = \frac{1}{4\alpha} (\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4)_i, \\
 & \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{4i} + \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{2i} + \frac{1}{8\alpha} (\vec{C}_2^2 - \vec{C}_4^2)_i = 0.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Если $\alpha' \neq 0$, то $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3 = 0, \vec{C}_1^2 = \vec{C}_3^2 \Rightarrow n_1 n_3 \cos \varphi_3 = 0, n_1^2 = n_3^2 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{2}, n_1 = n_3 \neq 0, \vec{C}_1 = n(i)\vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} \right), \vec{C}_3 = O\vec{C}_1, \vec{C}_4 = O\vec{C}_2, \vec{C}_2 = \frac{j}{\alpha} \vec{C}_1 + n_2(i)\vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} - \varphi_2 \right).$

Соотношения (23) приводятся к виду:

$$\begin{aligned}
 & \vec{P}_{ni} \cdot \vec{A} + \vec{P}_{ntt} \cdot O\vec{B} = 0, \\
 & \vec{P}_{ni} \cdot O\vec{A} = \vec{P}_{ntt} \cdot \vec{B}, \vec{P}_{nj} = O\vec{P}_{ntt}, \\
 & \vec{A} = a\vec{e} + bO\vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} \right), \\
 & a = \frac{n_1}{\alpha} + \frac{n_2 \sin \varphi_2}{4\alpha^2}, \\
 & b = -\frac{1}{4\alpha^2} \left(n_1 \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) + n_2 \cos \varphi_2 \right), \\
 & \vec{B} = a_1\vec{e} + b_1O\vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 & = \left(n_1 \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) + n_2 \cos \varphi_2 \right)_i - \\
 & - \frac{\alpha'}{2\alpha^2} \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) n_2 \sin \varphi_2, \\
 b_1 & = (n_2 \sin \varphi_2)_i + \\
 & + \frac{\alpha'}{2\alpha^2} \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) \left(n_1 \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) + n_2 \cos \varphi_2 \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (24) следуют равенства:

$$\begin{aligned}
 a\vec{P}_{ni} - b_1\vec{P}_{ntt} & = bO\vec{P}_{ni} + a_1O\vec{P}_{ntt}, \\
 \vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1 & = ab_1 - ba_1 \Rightarrow \\
 (ab_1 - ba_1)\vec{P}_{ntt}^2 & = (a^2 + b^2)(ab_1 - ba_1 - 1), \\
 (ab_1 - ba_1)\vec{P}_{ni}^2 & = (a_1^2 + b_1^2)(ab_1 - ba_1 - 1).
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Сравнивая старшие степени t , получим $n = 3, \vec{D}_3 = \vec{K}_3 - \text{постоянный вектор}, \vec{P}_3 = \vec{K}_3 t^3 + k_2(i)t^2 + t(6jO\vec{K}_3 + \vec{k}_1(i)) + 2jO\vec{K}_2 + \vec{k}_0(i).$

Векторное равенство (27) расщепляем по степеням t :

$$\begin{aligned}
 t^3 : O\vec{K}'_2 & = 12\alpha'\vec{K}_3 \Rightarrow \vec{k}_2 = -12\alpha O\vec{K}_3 + \vec{K}_2, \\
 jt^2 : \vec{K}_3 & = 0 \Rightarrow \vec{k}_2 = \vec{K}_2, t^2 : O\vec{K}'_1 = 4\alpha'\vec{K}_2 \Rightarrow \\
 \vec{D}_1 = \vec{k}_1 & = -4\alpha O\vec{K}_2 + \vec{K}_1, \vec{D}_0 = 2jO\vec{K}_2 + \vec{k}_0(i), \\
 \vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} & = 2\vec{K}_2 \cdot \vec{k}'_0.
 \end{aligned}$$

Скалярное равенство (27) расщепляем по степеням $t + \frac{j}{\alpha}$ и $j, \left(t + \frac{j}{\alpha} \right)^2 : \alpha n'_1 + 2n_1\alpha' = 0 \Rightarrow n_1\alpha^2 = C - \text{постоянная}, j \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) : \alpha' n_1 = 0 - \text{противоречие.}$

Пусть $\alpha' = 0 \Rightarrow \alpha \sim \frac{1}{2}$. Соотношения (22) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \vec{C}_1 & = n_1(i)\vec{e}(j), \\
 \vec{C}_3 & = n_3(i)(\vec{e} \cos \varphi_3 + O\vec{e} \sin \varphi_3), \\
 \vec{C}_2 & = \vec{e}(2jn_3 \cos \varphi_3 + n_2 \cos \varphi_2) + \\
 & + O\vec{e}(-2jn_3 \cos \varphi_3 + n_2 \sin \varphi_2), \\
 \vec{C}_4 & = \vec{e}n_4 \cos \varphi_4 + O\vec{e}(2jn_1 + n_4 \sin \varphi_4), \\
 2\vec{C}_1 - \vec{C}_3 t - \vec{C}_4 & = a_1\vec{e}(j) + a_2O\vec{e}, \\
 2\vec{C}_3 + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2 & = a_3\vec{e} + a_4O\vec{e}, \\
 a_1 & = 2n_1 - tn_3 \cos \varphi_3 - n_4 \cos \varphi_4, \\
 a_2 & = -tn_3 \sin \varphi_3 - 2n_1 j - n_4 \sin \varphi_4, \\
 a_3 & = 2n_3 \cos \varphi_3 + tn_1 + 2jn_3 \sin \varphi_3 + n_2 \cos \varphi_2, \\
 a_4 & = 2n_3 \sin \varphi_3 - 2jn_3 \cos \varphi_3 + n_2 \sin \varphi_2, \\
 \vec{C}_3 t + \vec{C}_4 & = b_1\vec{e} + b_2O\vec{e}, \\
 \vec{C}_1 t + \vec{C}_2 & = b_3\vec{e} + b_4O\vec{e}, \\
 b_1 & = tn_3 \cos \varphi_3 + n_4 \cos \varphi_4, \\
 b_2 & = tn_3 \sin \varphi_3 + 2n_1 j + n_4 \sin \varphi_4,
 \end{aligned}$$

$$b_3 = tn_1 + 2jn_3 \sin \varphi_3 + n_2 \cos \varphi_2,$$

$$b_4 = -2jn_3 \cos \varphi_3 + n_2 \sin \varphi_2.$$

Соотношения (23) принимают вид:

$$2(\vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1) = a_3 b_{3i} + a_4 b_{4i} - a_1 b_{1i} - a_2 b_{2i},$$

$$(a_1 \vec{P}_{ni} + b_{1i} \vec{P}_{ntt}) \cdot \vec{e} + (a_2 \vec{P}_{ni} + b_{2i} \vec{P}_{ntt}) \cdot O\vec{e} = 0,$$

$$(a_3 \vec{P}_{ni} - b_{3i} \vec{P}_{ntt}) \cdot \vec{e} + (a_4 \vec{P}_{ni} - b_{4i} \vec{P}_{ntt}) \cdot O\vec{e} = 0.$$

Пользуясь формулой $\vec{e}(j) = \vec{e}_0 \sin j + O\vec{e}_0 \cos j$, расщепляем эти соотношения по $\sin j$ и $\cos j$. Получим систему линейных однородных уравнений для величин $\vec{P}_{ni} \cdot \vec{e}_0, \vec{P}_{ni} \cdot O\vec{e}_0, \vec{P}_{ntt} \cdot \vec{e}_0, \vec{P}_{ntt} \cdot O\vec{e}_0$ с матрицей

$$M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_{1i} & b_{2i} \\ -a_2 & a_1 & -b_{2i} & b_{1i} \\ a_3 & a_4 & -b_{3i} & -b_{4i} \\ -a_4 & a_3 & b_{4i} & -b_{3i} \end{vmatrix}.$$

Если определитель Δ матрицы M не равен нулю, то $\vec{P}_{ni} = 0, \vec{P}_{ntt} = 0, \vec{P}_{nj} = 0 \Rightarrow \vec{P}_n \sim 0$.

Уравнение $a_3 b_{3i} + a_4 b_{4i} - a_1 b_{1i} - a_2 b_{2i} = 2$ расщепляем по t и j : $n_1^2 + n_3^2 = \text{const}$. Первые 4-е уравнения в (26) дают $n_1 n_3 \cos \varphi_3 = \text{const}, n_1^2 - n_3^2 = \text{const}$. Значит, величины n_1, n_3, φ_3 — постоянные. Дальнейшее расщепление по t и j приводит к соотношениям:

$$n_1 n_2 \cos \varphi_2 + n_3 n_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) = K_3,$$

$$n_1 n_4 \sin \varphi_4 + n_3 n_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = K_4,$$

$$i = \frac{1}{4} (n_2^2 + n_4^2) - n_1 n_4 \cos \varphi_4 + n_3 n_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Соотношения (26) после расщепления по j интегрируются:

$$n_1 n_4 \cos \varphi_4 + n_3 n_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) = K_1,$$

$$n_1 n_2 \cos \varphi_2 - n_3 n_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) = K_2,$$

$$n_4^2 - n_2^2 = N_0, n_2 n_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) = N_1,$$

$$n_1 n_2 \sin \varphi_2 - n_3 n_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3) = N_3,$$

$$n_2 n_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + n_1 n_4 \sin \varphi_4 = N_4,$$

где K_i, N_i — постоянные. Отсюда следует

$$n_2 \cos \varphi_2 = \text{const}, \quad n_4 \cos \varphi_4 \cos \varphi_3 = \text{const},$$

$$n_4 \sin \varphi_4 = \text{const}, \quad n_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 = \text{const}.$$

Непостоянное решение возможно лишь при $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, $n_1^2 = n_3^2, n_2^2 = n_4^2, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \varphi_4 = 0 \Rightarrow n_1 \sim -1, n_3 \sim 1, n_2 = n_4 = m(i)$.

В результате получим решение

$$\vec{x} = (t - 2j)O\vec{e}(j - t) + m(i)\vec{e}(j - t), \quad \frac{1}{2}m^2 + 2m = i,$$

для которого $\Delta = 0$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно решение может быть более общим при $\Delta = 0$. Расщепляем это равенство по t и j, t^4 :

$$\begin{vmatrix} -n_3 \cos \varphi_3 & -n_3 \sin \varphi_3 & (n_3 \cos \varphi_3)' & (n_3 \sin \varphi_3)' \\ n_3 \sin \varphi_3 & -n_3 \cos \varphi_3 & -(n_3 \sin \varphi_3)' & (n_3 \cos \varphi_3)' \\ n_1 & 0 & -n_1' & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & -n_1' \end{vmatrix} =$$

$$= (n_1 n_3' - n_3 n_1')^2 + n_3^2 \varphi_3'^2 = 0.$$

Такое же равенство получится при расщеплении по j^4 . Если $n_3 = 0$, то выписанные соотношения приводят к противоречию. Если $n_3 \neq 0$, то φ_3, n_1, n_3 — постоянные.

Соотношения (26) после расщепления по j приводятся к уравнениям:

$$(n_2 n_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4))' = 0,$$

$$(n_2^2 - n_4^2)' = 0,$$

$$n_3 \cos \varphi_3 (n_2 \cos \varphi_2)' + n_3 \sin \varphi_3 (n_2 \sin \varphi_2)' + n_1 (\cos \varphi_4)' = 0,$$

$$n_1 (n_2 \cos \varphi_2)' - n_3 \cos \varphi_3 (n_4 \cos \varphi_4)' - n_3 \sin \varphi_3 (n_4 \sin \varphi_4)' = 0,$$

$$n_1 (n_2 \sin \varphi_2)' + n_3 \sin \varphi_3 (n_4 \cos \varphi_4)' - n_3 \cos \varphi_3 (n_4 \sin \varphi_4)' = 0,$$

$$n_3 \sin \varphi_3 (n_2 \cos \varphi_2)' - n_3 \cos \varphi_3 (n_2 \sin \varphi_2)' - n_1 (n_4 \sin \varphi_4)' = 0.$$

Получили линейную однородную систему для величин $(n_2 \cos \varphi_2)', (n_2 \sin \varphi_2)', (n_4 \cos \varphi_4)', (n_4 \sin \varphi_4)'$. Нулевое решение приводит к противоречию. Нулевой определитель системы дает соотношение $(n_1^2 - n_3^2)^2 + 4n_1^2 n_3^2 \cos^2 \varphi_3 = 0 \Rightarrow n_1^2 = n_3^2 \neq 0, \cos \varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{2}, n_3 \sim 1, n_1 \sim -1$.

От системы остается два уравнения:

$$(n_2 \cos \varphi_2)' + (n_4 \sin \varphi_4)' = 0,$$

$$(n_2 \sin \varphi_2)' = (n_4 \cos \varphi_4)'$$

Соотношение $\Delta = 0$ сводится к уравнению $n_2^2 + n_4^2 - 2n_2 n_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) = 0$. Интегрируя уравнения $n_2 \cos \varphi_2 + n_4 \sin \varphi_4 = M_1, n_2 \sin \varphi_2 - n_4 \cos \varphi_4 = M_2$, получим $M_1^2 + M_2^2 = 0, \cos(\varphi_2 - \varphi_4) = 0$, т.к. $n_2^2 + n_4^2 \neq 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi(i), \varphi_4 = \varphi(i), n_2 = n_4 = m(i)$. Остаются соотношения (23):

$$\vec{P}_{nj} = O\vec{P}_{ntt},$$

$$\vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1 = (t - 2j)(m \sin \varphi)' + 2(m \cos \varphi)' + mm',$$

$$(2 + m \cos \varphi) \vec{P}_{ni} \cdot \vec{e}_0 + (t - 2j + m \sin \varphi) \vec{P}_{ni} \cdot O\vec{e}_0 =$$

$$= (m \cos \varphi)' \vec{P}_{ntt} \cdot \vec{e}_0 + (m \sin \varphi)' \vec{P}_{ntt} \cdot O\vec{e}_0,$$

$$(2 + m \cos \varphi) \vec{P}_{ni} \cdot O\vec{e}_0 - (t - 2j + m \sin \varphi) \vec{P}_{ni} \cdot \vec{e}_0 =$$

$$= (m \cos \varphi)' \vec{P}_{ntt} \cdot O\vec{e}_0 - (m \sin \varphi)' \vec{P}_{ntt} \cdot \vec{e}_0.$$

Два последних равенства представим в векторном виде $(\vec{A} - O\vec{B}) \cdot \vec{e}_0 = 0, (\vec{A} - O\vec{B}) \cdot O\vec{e}_0 = 0 \Rightarrow$

$\vec{A} = O\vec{B}$, где $\vec{A} = (2 + m \cos \varphi)\vec{P}_{ni} - (m \cos \varphi)' \vec{P}_{ntt}$, $\vec{B} = (t - 2j + m \sin \varphi)\vec{P}_{ni} - (m \sin \varphi)' \vec{P}_{ntt}$, $\cos(\lambda_1 t) \sin(\lambda_2 t)$, $\cos(\lambda_2 t) \sin(\lambda_1 t)$, $\sin(\lambda_1 t) \sin(\lambda_2 t)$:

$$\begin{aligned} (\vec{C}_2^2 - \vec{C}_1^2)_i &= 4\lambda_1^2 t \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2, \\ (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2)_i + \lambda_1^2 t (\vec{C}_2^2 - \vec{C}_1^2) &= 0, \\ (\vec{C}_4^2 - \vec{C}_3^2)_i &= 4\lambda_2^2 t \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4, \\ (\vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4)_i + \lambda_2^2 t (\vec{C}_4^2 - \vec{C}_3^2) &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^2 \vec{C}_3 (\vec{C}_{1i} + \lambda_1^2 t \vec{C}_2) + \lambda_1^2 \vec{C}_1 (\vec{C}_{3i} + \lambda_2^2 t \vec{C}_4) &= 0, \\ \lambda_2^2 \vec{C}_4 (\vec{C}_{1i} + \lambda_1^2 t \vec{C}_2) + \lambda_1^2 \vec{C}_1 (\vec{C}_{4i} - \lambda_2^2 t \vec{C}_3) &= 0, \\ \lambda_2^2 \vec{C}_3 (\vec{C}_{2i} - \lambda_1^2 t \vec{C}_1) + \lambda_1^2 \vec{C}_2 (\vec{C}_{3i} + \lambda_2^2 t \vec{C}_4) &= 0, \\ \lambda_1^2 \vec{C}_2 (\vec{C}_{4i} - \lambda_2^2 t \vec{C}_3) + \lambda_2^2 \vec{C}_4 (\vec{C}_{2i} - \lambda_1^2 t \vec{C}_1) &= 0, \\ \lambda_1^2 \vec{C}_1 \cdot \vec{P}_{ni} &= (\vec{C}_{1i} + \lambda_1^2 t \vec{C}_2) \cdot \vec{P}_{ntt}, \\ \lambda_1^2 \vec{C}_2 \cdot \vec{P}_{ni} &= (\vec{C}_{2i} - \lambda_1^2 t \vec{C}_1) \cdot \vec{P}_{ntt}, \\ \lambda_2^2 \vec{C}_3 \cdot \vec{P}_{ni} &= (\vec{C}_{3i} + \lambda_2^2 t \vec{C}_4) \cdot \vec{P}_{ntt}, \\ \lambda_2^2 \vec{C}_4 \cdot \vec{P}_{ni} &= (\vec{C}_{4i} - \lambda_2^2 t \vec{C}_3) \cdot \vec{P}_{ntt}. \end{aligned} \tag{30}$$

Остаются равенства

$$\begin{aligned} \vec{P}_{nj} &= O\vec{P}_{ntt}, \quad 4(\vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1) = \\ &= \lambda_1^2 (n_1^2 + n_2^2)_i + \lambda_2^2 (n_3^2 + n_4^2)_i. \end{aligned} \tag{31}$$

Подставляя выражения для $\vec{C}_l, l = 1, 2, 3, 4$ в полученные равенства (29), расщепляем их по переменным j и t :

$$\begin{aligned} (n_2^2 - n_1^2)' &= 0, \quad \lambda_1^2 n_1 n_2 \cos \varphi_2 = 0, \\ (n_4^2 - n_3^2)' &= 0, \quad \lambda_2^2 n_3 n_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) = 0, \\ (n_1 n_2 \cos \varphi_2)' &= 0, \quad \lambda_1^2 (n_2^2 - n_1^2) = 0, \\ (n_3 n_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3))' &= 0, \quad \lambda_2^2 (n_4^2 - n_3^2) = 0, \\ n_1 n_3 (\lambda_2 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_2') &= 0, \quad n_1 n_3 \varphi_3' = 0, \\ \lambda_2^2 n_3 n_1' + \lambda_1^2 n_1 n_3' &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_2 n_3 \sin \varphi_2 + \lambda_1^2 \lambda_2' n_1 n_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_2 n_3 \cos \varphi_2 + \lambda_1^2 \lambda_2' n_1 n_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ n_1 n_4 (\lambda_2 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_2') &= 0, \quad n_1 n_4 \varphi_4' = 0, \\ \lambda_2^2 n_4 n_1' + \lambda_1^2 n_1 n_4' &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_2 n_4 \sin \varphi_2 + \lambda_1^2 \lambda_2' n_1 n_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_2 n_4 \cos \varphi_2 - \lambda_1^2 \lambda_2' n_1 n_3 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) &= 0, \\ n_2 n_3 (\lambda_2 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_2') &= 0, \quad n_2 n_3 (\lambda_1^2 \varphi_3' - \lambda_2^2 \varphi_2') = 0, \\ \lambda_2^2 n_3 n_2' + \lambda_1^2 n_2 n_3' &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_1 n_3 \sin \varphi_2 + \lambda_1^2 \lambda_2' n_2 n_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_1 n_3 \cos \varphi_2 - \lambda_1^2 \lambda_2' n_2 n_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ n_2 n_4 (\lambda_2 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_2') &= 0, \quad n_2 n_4 (\lambda_1^2 \varphi_4' - \lambda_2^2 \varphi_2') = 0, \\ \lambda_1^2 n_2 n_4' + \lambda_2^2 n_4 n_2' &= 0, \\ \lambda_1^2 \lambda_2' n_2 n_3 \sin(\varphi_4 - \varphi_3) - \lambda_2^2 \lambda_1' n_1 n_4 \sin \varphi_2 &= 0, \\ \lambda_1^2 \lambda_2' n_2 n_3 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) + \lambda_2^2 \lambda_1' n_1 n_4 \cos \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

8. Бигармонические решения

Подставим представление решения (20) $\vec{x} = \vec{P}_n(t) + \vec{C}_1 \cos(\lambda_1 t) + \vec{C}_2 \sin(\lambda_1 t) + \vec{C}_3 \cos(\lambda_2 t) + \vec{C}_4 \sin(\lambda_2 t)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1(i) \neq 0, \lambda_2(i) \neq 0$ в систему (1). Линейное векторное равенство расщепляем по гармоникам $\vec{C}_{1j} = -\lambda_1^2 O\vec{C}_1$, $\vec{C}_{2j} = -\lambda_1^2 O\vec{C}_2$, $\vec{C}_{3j} = -\lambda_2^2 O\vec{C}_3$, $\vec{C}_{4j} = -\lambda_2^2 O\vec{C}_4 \Rightarrow \vec{C}_1 \sim n_1(i)\vec{e}(\lambda_1^2 j)$, $\vec{C}_2 = n_2(i)\vec{e}(\lambda_1^2 j - \varphi_2(i))$, $\vec{C}_3 = n_3(i)\vec{e}(\lambda_2^2 j - \varphi_3(i))$, $\vec{C}_4 = n_4(i)\vec{e}(\lambda_2^2 j - \varphi_4(i))$. Нелинейное равенство (1) расщепляем по линейно независимым гармоникам $\cos(\lambda_1 t)$, $\sin(\lambda_1 t)$, $\cos(2\lambda_1 t)$, $\sin(2\lambda_1 t)$, $\cos(\lambda_1 t) \cos(\lambda_2 t)$,

Если $\lambda_1 \lambda'_2 \neq \lambda_2 \lambda'_1$, то $n_1 n_4 = n_1 n_3 = n_2 n_4 = n_2 n_3 = 0$. Если $n_1 = 0$, то $n_2 \neq 0$, $n_3 = n_4 = 0$ получим гармоническое представление рассмотренное ранее. Значит $\lambda_2 = C \lambda_1$, где постоянная $C \neq 0$ или ± 1 . Если $\lambda'_1 \neq 0$, то из полученных равенств (32) следует $n_2^2 = n_1^2 \neq 0$, $n_4^2 = n_3^2 \neq 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_4 = \varphi_3 + \frac{\pi}{2}$, $\varphi'_3 = \varphi'_4 = 0$, $n_2 = N_1 n_1$, $n_4 = N_2 n_3$, $n_3 n_1^{C^2} = N_0$, $N_2 = C N_1$, $C^2 = 1$ формируется гармоническое представление. Таким образом, λ_1, λ_2 — постоянные, не равные нулю, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Равенства (30) равносильны следующим, если расщепить их по гармоническим функциям:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 n_1 \bar{P}_{ni} &= n'_1 \bar{P}_{ntt}, \\ \lambda_1^2 n_2 \bar{P}_{ni} - n'_2 \bar{P}_{ntt} + n_2 \varphi_2' O \bar{P}_{ntt} &= 0, \\ \lambda_2^2 n_3 \bar{P}_{ni} - n'_3 \bar{P}_{ntt} + n_3 \varphi_3' O \bar{P}_{ntt} &= 0, \\ \lambda_2^2 n_4 \bar{P}_{ni} - n'_4 \bar{P}_{ntt} + n_4 \varphi_4' O \bar{P}_{ntt} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда следуют равенства $\lambda_1^2 n_1 \bar{P}_{ni} \cdot \bar{P}_{ntt} = n'_1 \bar{P}_{ntt}^2$, $\lambda_1^2 n_2 \bar{P}_{ni} \cdot \bar{P}_{ntt} = n'_2 \bar{P}_{ntt}^2$, $\lambda_2^2 n_3 \bar{P}_{ni} \cdot \bar{P}_{ntt} = n'_3 \bar{P}_{ntt}^2$, $\lambda_2^2 n_4 \bar{P}_{ni} \cdot \bar{P}_{ntt} = n'_4 \bar{P}_{ntt}^2$.

Так как $n_1^2 + n_2^2 \neq 0$, $n_3^2 + n_4^2 \neq 0$, то можно предположить $n_1 \neq 0$, $n_3 \neq 0 \Rightarrow \varphi'_3 = 0$, $(n_2 n'_1 - n'_2 n_1) \bar{P}_{ntt}^2 = 0$, $(n_4 n'_3 - n'_4 n_3) \bar{P}_{ntt}^2 = 0$. Если $\bar{P}_{ntt} \neq 0$, то $n_2 = K_1 n_1$, $n_4 = K_2 n_3$, $n_3 = N_3 |n_1|^{-k}$, $k = \lambda_2^2 \lambda_1^{-2}$, $N_3 \neq 0$. Можно считать $\varphi'_2 = 0$, $\varphi'_4 = 0$. Тогда отсюда и из (33) имеем $\bar{P}_{ni} = n'_3 \lambda_2^{-2} n_3^{-1} \bar{P}_{ntt} = -n'_1 \lambda_1^{-2} n_1^{-1} \bar{P}_{ntt} = n'_1 \lambda_1^{-2} n_1^{-1} \bar{P}_{ntt} \Rightarrow n'_1 = 0$, $\bar{P}_{ni} = 0$ и все величины n_i, φ_i — постоянны. Получили противоречивое равенство (31). Значит, должно быть $\bar{P}_{ntt} = 0 \Rightarrow \bar{P}_{ni} = \bar{P}_{nj} = 0 \Rightarrow \bar{P}_n \sim 0$.

Из равенств (31) и (32) следует $n_4 = K_2 n_3$, $n_2 = K_1 n_1$, $K_1, K_2, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — постоянные, $|n_1|^{\lambda_1^2} |n_3|^{\lambda_2^2} \sim 1$, $4i = \lambda_1^2 (1 + K_1^2) n_1^2 + \lambda_2^2 (1 + K_2^2) n_3^2$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \sim 1$.

Теорема 4. Бигармоническое по времени решения системы (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= n_1(i) [\vec{e}(\lambda_1^2 j) \cos(\lambda_1 t) + \\ &+ K_1 \vec{e}(\lambda_1^2 j - \varphi_2) \sin(\lambda_1 t)] + \\ &+ n_3(i) [\vec{e}(\lambda_2^2 j - \varphi_3) \cos(\lambda_2 t) + \\ &+ K_2 \vec{e}(\lambda_2^2 j - \varphi_4) \sin(\lambda_2 t)]. \end{aligned} \quad (34)$$

с точностью до преобразований группы G .

9. Экспоненциально растущие гармоники

Подставим представление решения (21) $\vec{x} = \bar{P}_n(t) + (\vec{C}_1 e^{\mu t} + \vec{C}_2 e^{-\mu t}) \sin(\lambda(i)t) + (\vec{C}_3 e^{\mu t} + \vec{C}_4 e^{-\mu t}) \cos(\lambda(i)t)$ в систему (1). Линейное векторное равенство расщепляем по гармоническим функциям и экспонентам:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nj} &= O \bar{P}_{ntt}, \\ \vec{C}_{1j} &= (\mu^2 - \lambda^2) O \vec{C}_1 - 2\lambda \mu O \vec{C}_3, \\ \vec{C}_{3j} &= (\mu^2 - \lambda^2) O \vec{C}_3 + 2\lambda \mu O \vec{C}_1, \\ \vec{C}_{2j} &= (\mu^2 - \lambda^2) O \vec{C}_2 + 2\lambda \mu O \vec{C}_4, \\ \vec{C}_{4j} &= (\mu^2 - \lambda^2) O \vec{C}_4 - 2\lambda \mu O \vec{C}_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Линейная однородная система для векторов \vec{C}_2, \vec{C}_4 получится из аналогичной системы для \vec{C}_1, \vec{C}_3 заменой индексов $1 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 2$, поэтому достаточно найти общее решение уравнений (35) для \vec{C}_1, \vec{C}_3 . Характеристическое уравнение для решений вида e^{kj} имеет 4 различных собственных числа (две пары комплексно сопряженных) $\kappa_{\pm}^2 = (2\lambda \mu \pm \sqrt{-1}(\mu^2 - \lambda^2))^2$.

Вычисляя собственные функции, получим общее решение

$$\begin{aligned} \vec{C}_1 &= (\vec{C}_{1,1} e^{2\lambda \mu j} + \vec{C}_{1,2} e^{-2\lambda \mu j}) \cos(\mu^2 - \lambda^2)j + \\ &+ O(\vec{C}_{1,1} e^{2\lambda \mu j} + \vec{C}_{1,2} e^{-2\lambda \mu j}) \sin(\mu^2 - \lambda^2)j, \\ \vec{C}_3 &= O(\vec{C}_{1,1} e^{2\lambda \mu j} - \vec{C}_{1,2} e^{-2\lambda \mu j}) \cos(\mu^2 - \lambda^2)j - \\ &- (\vec{C}_{1,1} e^{2\lambda \mu j} - \vec{C}_{1,2} e^{-2\lambda \mu j}) \sin(\mu^2 - \lambda^2)j, \\ \vec{C}_2 &= O(\vec{C}_{4,1} e^{2\lambda \mu j} - \vec{C}_{4,2} e^{-2\lambda \mu j}) \cos(\mu^2 - \lambda^2)j - \\ &- (\vec{C}_{4,1} e^{2\lambda \mu j} - \vec{C}_{4,2} e^{-2\lambda \mu j}) \sin(\mu^2 - \lambda^2)j, \\ \vec{C}_4 &= (\vec{C}_{4,1} e^{2\lambda \mu j} + \vec{C}_{4,2} e^{-2\lambda \mu j}) \cos(\mu^2 - \lambda^2)j + \\ &+ O(\vec{C}_{4,1} e^{2\lambda \mu j} + \vec{C}_{4,2} e^{-2\lambda \mu j}) \sin(\mu^2 - \lambda^2)j. \end{aligned}$$

Здесь вектор-функции $\vec{C}_{1,1}, \vec{C}_{1,2}, \vec{C}_{4,1}, \vec{C}_{4,2}$ зависят от i . Вычисляя производные \vec{x}_i, \vec{x}_{it} , подставим их в скалярное уравнение (1). Расщепляем уравнение по линейно независимым гармоническим функциям $\sin(\lambda t), \cos(\lambda t), \sin(2\lambda t), \cos(2\lambda t)$, а затем по $e^{2\mu t}, e^{-2\mu t}$ и t . Получим основные равенства для коэффициентов $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3, \vec{C}_4$:

$$\begin{aligned} &(\vec{C}_1^2 - \vec{C}_3^2)(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda \mu \mu_i) + \\ &+ 2\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3(\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) - 2\lambda \mu \lambda_i) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3)_i + \lambda \mu (\vec{C}_1^2 - \vec{C}_3^2)_i = 0, \\ &(\vec{C}_2^2 - \vec{C}_4^2)(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda \mu \mu_i) - \\ &- 2\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4(\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) - 2\lambda \mu \lambda_i) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4)_i + \lambda \mu (\vec{C}_2^2 - \vec{C}_4^2)_i = 0, \\ &(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) - 2\lambda \mu \mu_i)(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 + \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3)_i + \\ &+ 2\lambda \mu (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4)_i + \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_3 - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4 = 0, \\ &(\vec{C}_3^2 - \vec{C}_1^2)(\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) - 2\lambda \mu \lambda_i) + \\ &+ 2\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda \mu \mu_i) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_3^2 - \vec{C}_1^2)_i + 4\lambda \mu (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3)_i = 0, \\ &(\vec{C}_4^2 - \vec{C}_2^2)(2\lambda \mu \lambda_i - \mu_i(\mu^2 - \lambda^2)) + \\ &+ 2\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda \mu \mu_i) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_4^2 - \vec{C}_2^2)_i - 4\lambda \mu (\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4)_i = 0, \\ &(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) - 2\lambda \mu \mu_i)(\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3 - \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4 - \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2)_i + \\ &+ 2\lambda \mu (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 - \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_1 + \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_2 - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_1^2 + \vec{C}_3^2)_i + 4\lambda\mu(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{3i} - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{1i}) = 0, \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_2^2 + \vec{C}_4^2)_i + 4\lambda\mu(\vec{C}_4 \cdot \vec{C}_{2i} - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_{4i}) = 0, \\
 &(\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda\mu\lambda_i)(\vec{C}_1^2 + \vec{C}_3^2) = 0, \\
 &(\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda\mu\lambda_i)(\vec{C}_2^2 + \vec{C}_4^2) = 0; \\
 &\vec{P}_{ni} \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_1 - 2\lambda\mu\vec{C}_3) + \\
 &+ \vec{P}_{ntt} \cdot (\vec{C}_{1i} + \mu_i t \vec{C}_1 - \lambda_i t \vec{C}_3) = 0, \\
 &\vec{P}_{ni} \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_3 + 2\lambda\mu\vec{C}_1) + \\
 &+ \vec{P}_{ntt} \cdot (\vec{C}_{3i} + \mu_i t \vec{C}_3 + \lambda_i t \vec{C}_1) = 0, \\
 &\vec{P}_{ni} \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_2 + 2\lambda\mu\vec{C}_4) + \\
 &+ \vec{P}_{ntt} \cdot (\vec{C}_{2i} - \mu_i t \vec{C}_2 - \lambda_i t \vec{C}_4) = 0, \\
 &\vec{P}_{ni} \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_4 - 2\lambda\mu\vec{C}_2) + \\
 &+ \vec{P}_{ntt} \cdot (\vec{C}_{4i} - \mu_i t \vec{C}_4 + \lambda_i t \vec{C}_2) = 0; \\
 &-2(\vec{P}_{ntt} \cdot \vec{P}_{ni} + 1) = \\
 &= (\vec{C}_{1i} + \mu_i t \vec{C}_1 - \lambda_i t \vec{C}_3) \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_2 + 2\lambda\mu\vec{C}_4) + \\
 &+ (\vec{C}_{2i} - \mu_i t \vec{C}_2 - \lambda_i t \vec{C}_4) \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_1 - 2\lambda\mu\vec{C}_3) + \\
 &+ (\vec{C}_{3i} + \mu_i t \vec{C}_3 + \lambda_i t \vec{C}_1) \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_4 - 2\lambda\mu\vec{C}_2) + \\
 &+ (\vec{C}_{4i} - \mu_i t \vec{C}_4 + \lambda_i t \vec{C}_2) \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_3 + 2\lambda\mu\vec{C}_1).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство $\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda\mu\lambda_i = 0 \Rightarrow \mu^2 + \lambda^2 = K\mu$, $K \neq 0$ – постоянная, если $\mu_i^2 + \lambda_i^2 \neq 0$. В этом случае из основных равенств следует $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3 = 0$, $\vec{C}_1^2 = \vec{C}_3^2$, $\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4 = 0$, $\vec{C}_2^2 = \vec{C}_4^2 \Rightarrow \vec{C}_3 = O\vec{C}_1$, $\vec{C}_4 = -O\vec{C}_2$ и $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4$, $\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3 + \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 = 0 \Rightarrow \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = 0$, $\vec{C}_2 \cdot O\vec{C}_1 = 0 \Rightarrow \vec{C}_2 = \vec{C}_4 = 0$, $\vec{C}_{1,2} = 0$, $\vec{C}_1 = e^{2\lambda\mu j} c(i) \vec{e}(\varphi - (\mu^2 - \lambda^2)j)$.

Из основных равенств следует $(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_1^2)_i = 4\lambda\mu\vec{C}_{1i} \cdot O\vec{C}_1$. Подстановка уточненного представления для \vec{C}_1 , расщепление по j дает соотношения: $c'(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda\mu c\varphi' = 0$, $(\mu^2 - \lambda^2)(\mu\lambda)' = \mu\lambda(\mu^2 - \lambda^2)' \Rightarrow \mu^2 - \lambda^2 = N\mu\lambda$, N – постоянная, $\mu^2 + \lambda^2 = K\mu \Rightarrow \mu, \lambda$ – постоянные. Противоречие. Значит в основных равенствах надо считать $\mu_i = \lambda_i = 0$. Представим коэффициенты решения в виде: $\vec{C}_{1,1} = c_{1,1}\vec{e}(\varphi_{1,1}(i))$, $\vec{C}_{1,2} = c_{1,2}\vec{e}(\varphi_{1,2}(i))$, $\vec{C}_{4,1} = c_{4,1}\vec{e}(\varphi_{4,1}(i))$, $\vec{C}_{4,2} = c_{4,2}\vec{e}(\varphi_{4,2}(i)) \Rightarrow \vec{C}_1 = e^{2\lambda\mu j} c_{1,1}\vec{e}_{1,1} + e^{-2\lambda\mu j} c_{1,2}\vec{e}_{1,2}$, $\vec{C}_3 = e^{2\lambda\mu j} c_{1,1} O\vec{e}_{1,1} - e^{-2\lambda\mu j} c_{1,2} O\vec{e}_{1,2}$, $\vec{C}_4 = e^{2\lambda\mu j} c_{4,1}\vec{e}_{4,1} + e^{-2\lambda\mu j} c_{4,2}\vec{e}_{4,2}$, $\vec{C}_2 = e^{2\lambda\mu j} c_{4,1} O\vec{e}_{4,1} - e^{-2\lambda\mu j} c_{4,2} O\vec{e}_{4,2}$, где $\vec{e}_{1,1} = \vec{e}(\varphi_{1,1} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$, $\vec{e}_{1,2} = \vec{e}(\varphi_{1,2} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$, $\vec{e}_{4,1} = \vec{e}(\varphi_{4,1} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$, $\vec{e}_{4,2} = \vec{e}(\varphi_{4,2} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$.

Подстановка в основные равенства и расщепление по j приводит к равенствам:

$$\begin{aligned}
 &(c_{1,1}c_{1,2})' = 0, \quad c_{1,1}c_{1,2}(\varphi'_{1,1} - \varphi'_{1,2}) = 0, \\
 &(c_{4,1}c_{4,2})' = 0, \quad c_{4,1}c_{4,2}(\varphi'_{4,1} - \varphi'_{4,2}) = 0; \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)c'_{1,1} + 2\lambda\mu c_{1,1}\varphi'_{1,1} = 0, \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)c'_{1,2} = 2\lambda\mu c_{1,2}\varphi'_{1,2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(\mu^2 - \lambda^2)c'_{4,1} + 2\lambda\mu c_{4,1}\varphi'_{4,1} = 0, \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)c'_{4,2} = 2\lambda\mu c_{4,2}\varphi'_{4,2}, \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)c_{1,1}c_{4,1}(\varphi'_{1,1} - \varphi'_{4,1}) + 2\lambda\mu(c_{1,1}c'_{4,1} - c_{4,1}c'_{1,1}) = 0, \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)c_{1,2}c_{4,2}(\varphi'_{1,2} - \varphi'_{4,2}) + 2\lambda\mu(c_{4,2}c'_{1,2} - c_{1,2}c'_{4,2}) = 0; \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)\vec{P}_{ni} + \varphi' O\vec{P}_{ntt} = 0, \quad \varphi = \varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{4,1}, \varphi_{4,2}; \\
 &0 = \vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1 + (\mu^2 - \lambda^2) \\
 &(-c_{1,1}c_{4,2} \sin(\varphi_{4,2} - \varphi_{1,1}) + c_{1,2}c_{4,1} \sin(\varphi_{4,1} - \varphi_{4,2}))_i + \\
 &+ 2\lambda\mu(c_{1,1}c_{4,2} \cos(\varphi_{4,2} - \varphi_{1,1}) + c_{1,2}c_{4,1} \cos(\varphi_{4,1} - \varphi_{4,2}))_i.
 \end{aligned}$$

Если $\mu^2 \neq \lambda^2$, $\kappa = 2\lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2)^{-1}$, то $c_{1,1} = K_{1,1}e^{-\kappa\varphi_{1,1}}$, $c_{1,2} = K_{1,2}e^{\kappa\varphi_{1,2}}$, $c_{4,1} = K_{4,1}e^{-\kappa\varphi_{4,1}}$, $c_{4,2} = K_{4,2}e^{\kappa\varphi_{4,2}}$, $K_{1,1}K_{1,2}(\varphi'_{1,2} - \varphi'_{1,1}) = 0$, $K_{1,1}K_{4,1}(\varphi'_{4,1} - \varphi'_{1,1}) = 0$, $K_{1,2}K_{4,2}(\varphi'_{4,2} - \varphi'_{1,2}) = 0$, $K_{4,1}K_{4,2}(\varphi'_{4,2} - \varphi'_{4,1}) = 0$.

Если все постоянные $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{4,1}$, $K_{4,2}$ не равны нулю, то все значения углов одинаковые $\varphi_{1,1} = \varphi_{1,2} = \varphi_{4,1} = \varphi_{4,2} = \varphi(i) \sim 0 \Rightarrow \vec{C}_{li} = 0$, $l = 1, 2, 3, 4$, $\vec{x}_i = \vec{P}_{ni} = 0$ противоречие.

Различные углы возможны лишь для двух эквивалентных случаев $K_{1,1} = K_{4,2} = 0$, $\varphi_{1,2} \neq \varphi_{4,1}$, $K_{1,2} \neq 0$, $K_{4,1} \neq 0$ и $K_{1,2} = K_{4,1} = 0$, $\varphi_{1,1} \neq \varphi_{1,2}$, $K_{1,1} \neq 0$, $K_{4,2} \neq 0$.

Из основных равенств следует в первом случае

$$(\mu^2 - \lambda^2)\vec{P}_{ni} + \varphi'_{1,2} O\vec{P}_{ntt} = 0,$$

$$(\mu^2 - \lambda^2)\vec{P}_{ni} + \varphi'_{4,1} O\vec{P}_{ntt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{ni} = \vec{P}_{ntt} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 -2 &= (\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 + \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4)_i + \\
 &+ 2\lambda\mu(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3)_i,
 \end{aligned}$$

где $\vec{C}_1 = K_{1,2}e^{-2\lambda\mu j + \kappa\varphi_{1,2}}\vec{e}_{1,2}$, $\vec{C}_3 = -O\vec{C}_1$, $\vec{e}_{1,2} = \vec{e}(\varphi_{1,2} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$, $\vec{C}_2 = O\vec{C}_4$, $\vec{C}_4 = K_{4,1}e^{2\lambda\mu j - \kappa\varphi_{4,1}}\vec{e}_{4,1}$, $\vec{e}_{4,1} = \vec{e}(\varphi_{4,1} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$.

Решение принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= K_{1,2}e^{-2\lambda\mu j + \kappa\varphi_{1,2} + \mu t} \vec{e}(\varphi_{1,2} - (\mu^2 - \lambda^2)j - \lambda t + \frac{\pi}{2}) + \\
 &+ K_{4,1}e^{2\lambda\mu j - \kappa\varphi_{4,1} - \mu t} \vec{e}(\varphi_{4,1} - (\mu^2 - \lambda^2)j - \lambda t).
 \end{aligned}$$

С помощью преобразований эквивалентности из группы G оно приводится к виду:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= e^{-\sigma \sin 2\theta} [e^{-j \sin 2\theta - t \sin \theta} \vec{e}(t \cos \theta + \\
 &+ (j + \sigma) \cos 2\theta) + \\
 &+ e^{j \sin 2\theta + t \sin \theta} \vec{e}(t \cos \theta + (j - \sigma) \cos 2\theta)], \quad (36) \\
 &- e^{2\sigma \sin 2\theta} = 2\sigma'(i) \sin(2\sigma \cos 2\theta + 4\theta),
 \end{aligned}$$

где $\theta \neq 0$, $\frac{\pi}{4}$ – постоянная; $\sigma(i)$ – функция переменной i [9].

Рассмотрим случай

$$\mu^2 = \lambda^2, \quad \mu \sim 1, \quad \lambda \sim 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= \vec{P}_n(t) + (\vec{C}_1 \sin t + \vec{C}_3 \cos t)e^t + (\vec{C}_2 \sin t + \vec{C}_4 \cos t)e^{-t}, \\
 \vec{C}_1 &= \vec{C}_{1,1}e^{2j} + \vec{C}_{1,2}e^{-2j},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{C}_3 &= O\vec{C}_{1,1}e^{2j} - O\vec{C}_{1,2}e^{-2j}, \\ \vec{C}_2 &= O\vec{C}_{4,1}e^{2j} - O\vec{C}_{4,2}e^{-2j}, \\ \vec{C}_4 &= \vec{C}_{4,1}e^{2j} + \vec{C}_{4,2}e^{-2j}. \end{aligned}$$

Основные равенства принимают вид:

$$\begin{aligned} \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{1i} &= \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{3i}, \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{3i} = 0, \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{1i} = 0; \\ \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_{4i} &= \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_{2i}, \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_{4i} = 0, \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_{2i} = 0, \\ \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{2i} - \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_{1i} + \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{4i} - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_{3i} &= 0, \\ \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{2i} - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_{1i} + \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_{3i} - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{4i} &= 0, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} 2\vec{C}_1 \cdot \vec{P}_{ni} + \vec{C}_{3i} \cdot \vec{P}_{ntt}, 2\vec{C}_3 \cdot \vec{P}_{ni} &= \vec{C}_{1i} \cdot \vec{P}_{ntt}, \\ 2\vec{C}_2 \cdot \vec{P}_{ni} = \vec{C}_{4i} \cdot \vec{P}_{ntt}, 2\vec{C}_4 \cdot \vec{P}_{ni} + \vec{C}_{2i} \cdot \vec{P}_{ntt} &= 0, \\ -1 - \vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} = (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3)_i &= \\ = 2(\vec{C}_{1,1} \cdot \vec{C}_{4,2} + \vec{C}_{1,2} \cdot \vec{C}_{4,1})'. \end{aligned} \tag{38}$$

Расщепление равенств (37) по j приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} \vec{C}'_{1,1} \cdot O\vec{C}_{1,1} = 0, \vec{C}'_{1,2} \cdot O\vec{C}_{1,2} = 0, \\ \vec{C}'_{1,1} \cdot O\vec{C}_{1,2} = \vec{C}'_{1,2} \cdot O\vec{C}_{1,1}, \\ (\vec{C}_{1,1} \cdot \vec{C}_{1,2})' = 0, \vec{C}'_{4,1} \cdot O\vec{C}_{4,1} = 0, \\ \vec{C}'_{4,2} \cdot \vec{C}_{4,2} = 0, \vec{C}'_{4,1} \cdot O\vec{C}_{4,2} = \vec{C}'_{4,2} \cdot O\vec{C}_{4,1}, \\ (\vec{C}_{4,1} \cdot \vec{C}_{4,2})' = 0, \vec{C}'_{1,1} \cdot \vec{C}_{4,1} = \vec{C}'_{4,1} \cdot \vec{C}_{1,1}, \\ \vec{C}'_{4,1} \cdot O\vec{C}_{1,1} + \vec{C}'_{1,1} \cdot O\vec{C}_{4,1} = 0, \\ \vec{C}'_{1,2} \cdot \vec{C}_{4,2} = \vec{C}'_{4,2} \cdot \vec{C}_{1,2}, \\ \vec{C}'_{4,2} \cdot O\vec{C}_{1,2} + \vec{C}'_{1,2} \cdot O\vec{C}_{4,2} = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Один из коэффициентов не равен нулю, например, $\vec{C}_{1,1} = c(i)\vec{e}(\varphi(i)) \neq 0$. Тогда из (39) следуют равенства $\varphi = \varphi_0$ — постоянная, $\vec{C}_{1,2} = c_2\vec{e}(\varphi_2)$, $K\varphi'_2 = 0$, $cc_2 = K$ — постоянная; $\vec{C}_{4,1} = b_1(i)\vec{e}(\varphi_3(i))$, $b_1\varphi'_3 = 0$; $\vec{C}_{4,2} = b(i)\vec{e}(\varphi_4(i))$, $b\varphi'_4 = 0$, $(b_1b)' = 0$; $c'b_1 = cb'_1 \Rightarrow c^{-1}b_1 = B_1$ — постоянная, $K(cb)' = 0$, $B_1(cb)' = 0$, $B_1\varphi'_3 = 0$.

Равенства (38) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \vec{P}_{ni} = \frac{1}{2}c^{-1}c'O\vec{P}_{ntt}, (bc)'O\vec{P}_{ntt} = 0, \\ -\frac{1}{2}i = cb \cos(\varphi_4 - \varphi_0) + KB_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Если $K \neq 0$, то $cb = B_2$ — постоянная, $B_1\varphi'_3 = 0$, $B_2\varphi'_4 = 0$, $\varphi'_2 = 0$ и равенство $-\frac{1}{2}i = B_2 \cos(\varphi_4 - \varphi_0) + KB_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)$ противоречиво для любых значений B_1 и B_2 . Значит, $K = 0$, $-\frac{1}{2}i = cb \cos(\varphi_4 - \varphi_0) \neq 0$, $\varphi'_4 = 0$, $cb \neq \text{const} \Rightarrow B_1 = 0$, $\vec{P}_{ntt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{nj} = \vec{P}_{ni} = 0 \Rightarrow \vec{P}_n \sim 0$, $\vec{C}_1 = c(i)e^{2j}\vec{e}(\varphi_0)$, $\vec{C}_3 = O\vec{C}_1$, $\vec{C}_4 = b(i)e^{-2j}\vec{e}(\varphi_4)$, $\vec{C}_2 = -O\vec{C}_4$.

Получаем решение

$$\begin{aligned} \vec{x} = ce^{t+2j}O\vec{e}(t + \varphi_0) + be^{-t-2j}O\vec{e}(t + \varphi_4), \\ 2bc \cos(\varphi_0 - \varphi_4) + i = 0, \end{aligned}$$

которое преобразованиями из группы G подобно следующему

$$\vec{x} \sim e^{t+2j}\vec{e}(t+\theta) + b(i)e^{-t-2j}\vec{e}(t), 2b \sin \theta = i, \tag{40}$$

где θ — постоянная, не равная нулю.

Теорема 5. Решения системы (1) в виде экспоненциально растущих по времени гармоник (21) определены формулами (36) и (40) с точностью до преобразований группы G .

10. О возможности существования решений для вспомогательных функций общего вида

Для случая 3^0 решений цепочки уравнений для вспомогательных функций уравнение (11) при $k = 1$ принимает вид:

$$j\vec{x}^{(4)} = \frac{1}{2}\tilde{t}O\vec{x}'''' + C(i)\vec{x}'''. \tag{41}$$

При $k = 2$ уравнение (11) является продифференцированным по t уравнением (41). Уравнение (41) интегрируем по t дважды и по j в силу (1):

$$\begin{aligned} 2j\vec{x}_j + \tilde{t}\vec{x}' - 2\vec{x} - 2CO\vec{x} = \\ = 2\tilde{t}O\vec{\alpha}(i, j) + 2O\vec{\beta}(i, j) = 2\vec{\gamma}_0(i, \tilde{t}) \Rightarrow \vec{\alpha}_j = \vec{\beta}_j = 0. \end{aligned}$$

Общее решение представляется в виде $\vec{x} = \vec{y} + \tilde{t}\vec{\gamma}(i) + \vec{\delta}(i)$, где \vec{y} удовлетворяет однородному уравнению. Замена переменных $\vec{y}(i, j, \tilde{t}) = \vec{y}(i, \tilde{t}, s)$, $s = \tilde{t}^{-2}j$ приводит к системе из обыкновенных дифференциальных уравнений $\tilde{t}\vec{y}'_i = 2\vec{y} + 2CO\vec{y}$. Общее решение имеет вид:

$$\vec{y} = \tilde{t}^2(\vec{C}_1(i, s) \sin(2C \ln |\tilde{t}|) - O\vec{C}_1(i, s) \cos(2C \ln |\tilde{t}|)).$$

Подстановка общего решения \vec{x} в векторное уравнение (1), расщепление по гармоническим функциям дает уравнение: $\vec{C}_{1s} = 2O\vec{A}$, $\vec{A} = (1 - 2C^2)\vec{C}_1 + 3CO\vec{C}_1 - s\vec{C}_{1s} - 4CsO\vec{C}_{1s} + 2s^2\vec{C}_{1ss}$. Скалярное уравнение (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} 1 + \vec{C}_{1s} \cdot O\vec{B} = (\tilde{t}\vec{\gamma}' + \vec{\delta}' - \vec{\gamma}Q') \times \\ \times (O\vec{C}_{1s} \sin(2C \ln |\tilde{t}|) + \vec{C}_{1s} \cos(2C \ln |\tilde{t}|)), \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \tilde{t}^2(\vec{C}_{1i} + 2C' \ln |\tilde{t}|O\vec{C}_1) - 2\tilde{t}Q'(\vec{C}_1 + CO\vec{C}_1 - s\vec{C}_{1s}).$$

Расщепление по t приводит к противоречивому равенству $1 = \tilde{t}^2\vec{C}_{1i} \cdot \vec{C}_{1s}$.

Новый тип продолжения $p_0 = -1$, $q_0(i)$, $p_k = q_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$ задает равенства

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}'' = -1 \Rightarrow \vec{x}'_i \cdot \vec{x}'' + \vec{x}_i \cdot \vec{x}'''' = 0,$$

$$\vec{x}_i \cdot O\vec{x}'''' - \vec{x}'_i \cdot O\vec{x}''' = q_0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \bar{x}''/2 \bar{x}_i' + q_0 O\bar{x}'' - (\bar{x}_i \cdot O\bar{x}'') O\bar{x}''' &= \bar{x}''', \\ \bar{x}_i^{(k)} \cdot \bar{x}^{(k+2)} = 0 \Rightarrow \bar{x}_i^{(k+1)} \cdot \bar{x}^{(k+2)} &= -\bar{x}_i^{(k)} \cdot \bar{x}^{(k+3)}, \\ \bar{x}_i^{(k+1)} \cdot O\bar{x}^{(k+2)} &= \bar{x}_i^{(k)} \cdot O\bar{x}^{(k+3)} \Rightarrow \\ (\bar{x}^{(k+2)})^2 \bar{x}_i^{(k+1)} &= (\bar{x}_i^{(k)} \cdot O\bar{x}^{(k+2)}) O\bar{x}^{(k+3)}. \end{aligned}$$

При $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned} (\bar{x}''')^2 \bar{x}_i'' &= (\bar{x}_i' \cdot O\bar{x}''') O\bar{x}^{(4)} \Rightarrow \\ (\bar{x}''')^2 \bar{x}_i''' + 2(\bar{x}'''' \cdot O\bar{x}^{(4)}) \bar{x}_i'' &= \\ = (\bar{x}_i' \cdot O\bar{x}''') O\bar{x}^{(5)} + (\bar{x}_i' \cdot O\bar{x}''')' O\bar{x}^{(4)}. \end{aligned}$$

При $k = 2$ имеем $(\bar{x}^{(4)})^2 \bar{x}_i''' = (\bar{x}_i'' O\bar{x}^{(4)}) O\bar{x}^{(5)} = (\bar{x}''')^{-2} (\bar{x}^{(4)})^2 (\bar{x}_i' O\bar{x}''') O\bar{x}^{(5)}$. Отсюда получим

$$\begin{aligned} ((\bar{x}''')^2)' (\bar{x}_i' \cdot O\bar{x}''') &= (\bar{x}''')^2 (\bar{x}_i' \cdot O\bar{x}''')' \Rightarrow \\ \bar{x}_i' \cdot O\bar{x}'''' &= \alpha(i, j) (\bar{x}''')^2 \Rightarrow \bar{x}_i' = \alpha(i, j) O\bar{x}'''' \Rightarrow \\ \bar{x}_i &= \alpha \bar{x}_j + \vec{\beta}(i, j), \vec{\beta} \cdot \bar{x}'' = -1, \vec{\beta} \cdot O\bar{x}'''' = q_0 \Rightarrow \\ \vec{\beta} \cdot O\bar{x}'' &= q_0 t + \gamma(i, j) = \vec{\beta} \cdot \bar{x}_j, \vec{\beta} \cdot O\bar{x}_j = 1 \Rightarrow \\ \vec{\beta}^2 \bar{x}_j &= -O\vec{\beta} + (q_0 t + \gamma) \vec{\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда следует $\bar{x}_i'' = \bar{x}_j'' = 0 \Rightarrow \bar{x}^{(4)} = 0$ полиномиальное представление решения, рассмотренное ранее.

Аналогичное заключение можно сделать для любого типа продолжения нового типа. Итак, получились решения (13), (14), (16), (17), (28), (34), (36), (40).

11. Движения газа полученных решений

1⁰. Полиномиальное решение (13) задает движение в стационарной системе координат $O\vec{e}_0, \vec{e}_0: x = t\alpha(i) + 2j, y = t^2 - \frac{1}{2}i$. В начальный момент времени $t = 0$ определяются зависимости j и $i: x(0) = \xi = 2j, y(0) = \eta = -\frac{1}{2}i$. Решение представляем в виде $x = t\alpha(-2\eta) + \xi, y = t^2 + \eta, i = 2t^2 - 2y$. Мировые линии не пересекаются. Траектории частиц — параболы. Получаем разворот потока вдоль оси y .

2⁰. Полиномиальное решение (14) в координатах таково $x = t^2 + 6tj - \frac{1}{2}i, y = t^3 - 2j$. При $t = 0$ определяем зависимости $i = -2\xi, j = -\frac{1}{2}\eta, x = t^2 - 3t\eta + \xi, y = t^3 + \eta, i = 6t^4 + 2t^2 - 2x - 6ty$. Траектория частицы $y = y(x)$, заданной начальным положением $\vec{\xi}$, имеет точку минимума $x_m = \xi - \frac{9}{4}\eta^2, y_m = \frac{27}{8}\eta^3 + \eta$ и две точки перегиба при $t = 0, \vec{x}_0 = \vec{\xi}$ и при $t = 3\eta, x_1 = \xi, y_1 = \eta(27\eta^2 + 1)$, в которых меняется выпуклость. Получаем разворот потока вдоль оси x .

3⁰. Гармоническое решение (16) $\vec{x} = C(i)\vec{e}(\alpha^2 j - t\alpha(i)), \alpha^2 C C' = 1$ при $t = 0$ определяет зависимости i, j от $\vec{\xi} = C(i)\vec{e}(\alpha^2 j)$. Движение частицы с радиус-вектором $\vec{\xi}$ происходит по окружности $|\vec{x}| = |\vec{\xi}| = C$ с постоянной

скоростью $-\alpha(i)$, согласованной с радиусом окружности: $\arg \vec{x} = \arg \vec{\xi} - t\alpha$.

4⁰. Гармоническое решение (17) $\vec{x} = (t^2 + 2 \ln |C|)\vec{e}_0 + 2jO\vec{e}_0 + C(i)\vec{e}(j - t), i = \frac{1}{2}C^2 - 4 \ln |C|$ при $t = 0$ определяет зависимости j, C от $\vec{\xi}: \vec{\xi} = (2 \ln |C| + C \cos j)\vec{e}_0 + (2j + C \cos j)O\vec{e}_0$. Движение частицы $\vec{x} = \vec{\xi} + t^2\vec{e}_0 + C(\vec{e}(j - t) - \vec{e}(j))$, $\vec{x}_t(0) = CO\vec{e}(j)$ определяется начальным вектором $\vec{\xi}$, вектором $t^2\vec{e}_0$ на прямой l , перпендикулярной вектору $O\vec{e}_0$ из точки $\vec{\xi}$, движением с постоянной скоростью по окружности m радиуса C с центром сдвинутым на вектор $-C\vec{e}(j)$ от точки $\vec{\xi}$. Траектория колеблется возле прямой l . Отстоит от l на величину не более, чем $C(1 - \cos j)$ с одной стороны и на величину $C(1 + \cos j)$ с другой стороны. Пересекает l при t_1 , когда l пересекает m . Две ветви траектории при $t > 0$ и $t < 0$ гладко примыкают в начальной точке. Происходит отражение сгущающихся частиц от среды с изменяющимся термодинамическим потенциалом $i(\xi, \eta)$.

5⁰. Линейно растущие гармоники (28) $\vec{x} = (t - 2j)O\vec{e}(j - t) + m(i)\vec{e}(j - t - \varphi(i)), i = 2m \cos \varphi + \frac{1}{2}m^2, m \sin \varphi = C = \text{const}$ при $t = 0$ определяют зависимости j, m и φ от начальной точки $\vec{\xi} = \vec{x}(0) = -2O\vec{e}(j) + m\vec{e}(j - \varphi)$. Закон движения представим в виде $\vec{x} = \Lambda(-t)(\vec{\xi} + tO\vec{e}(j))$, $\vec{x}_t(0) = O\vec{\xi} + O\vec{e}(j)$. Здесь вектор $\vec{\xi} + tO\vec{e}(j)$ на прямой поворачивается на угол $-t$ вокруг начала. Частица двигается по линейно растущей спирали вокруг начальной точки. Происходит разворот сгущающихся частиц в среде $i(\xi, \eta)$. Начало $\vec{x} = \vec{\xi} = 0$ стоит на месте.

6⁰. Бигармоническое решение (34) рассмотрим при $K_1 = K_2 = 0: \vec{x} = n\vec{e}(\lambda^2 j) \cos(\lambda t) + n^{-\lambda^{-2}}\vec{e}(j - \varphi) \cos t, 4i = \lambda^2 n^2 + n^{-2\lambda^{-2}}$, где λ, φ — постоянные. При $t = 0$ определяются зависимости n, j от $\vec{\xi} = n\vec{e}(\lambda^2 j) + n^{-\lambda^{-2}}\vec{e}(j - \varphi)$. Движение частицы $\vec{x} = \vec{\xi} \cos t + n\vec{e}(\lambda^2 j)(\cos(\lambda t) - \cos t)$ имеет ограниченную траекторию $|\vec{x}| < |\vec{\xi}| + 2n$. В координатной системе $O\vec{e}(\lambda^2 j), \vec{e}(\lambda^2 j)$ имеем движение частицы $\tilde{x} = \tilde{\xi} \cos t, \tilde{y} = n \cos(\lambda t) + (\tilde{\eta} - n) \cos t$ по траектории $\tilde{y} = \tilde{x} \frac{\tilde{\eta} - n}{\tilde{\xi}} + n \cos\left(\lambda \arccos \frac{\tilde{x}}{\tilde{\xi}}\right)$, на которой должны быть две точки остановки при $t = \pi k, k = 0, 1, 2, \dots$ ($\tilde{x}_t = 0$). Отсюда следует $\lambda = 2, 3, \dots$ При $\lambda = 2$ из начальной точки происходит колебание по параболе $\tilde{y} = 2n \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{\xi}}\right)^2 + (\tilde{\eta} - n) \frac{\tilde{x}}{\tilde{\xi}} - n$ между точками $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ и $(-\tilde{\xi}, 2n - \tilde{\eta})$.

7⁰. Экспоненциально растущие гармоники (36) рассмотрим при $\theta = \frac{\pi}{2}: \vec{x} = e^{-t}\vec{e}(-j - \sigma) + e^t\vec{e}(\sigma - j), i = i_0 - \cos(2\sigma)$. При $t = 0$ начальная точка задается вектором $\vec{\xi} = 2 \cos \sigma \cos j O\vec{e}_0 - 2 \cos \sigma \sin j \vec{e}_0$ с полярными координатами $\xi = r \cos \varphi = 2 \cos \sigma \cos j, \eta = r \sin \varphi = -2 \cos \sigma \sin j \Rightarrow r = 2|\cos \sigma|, \varphi = -j$. При $t = 0$ все частицы находятся внутри круга радиуса 2. Движение начальной точки представим в виде $\vec{x} = 2 \cosh t \cos \sigma \vec{e}(\varphi) - 2 \sinh t \sin \sigma O\vec{e}(\varphi) = \tilde{x}O\vec{e}(\varphi) + \tilde{y}\vec{e}(\varphi)$. В координатной системе $O\vec{e}(\varphi), \vec{e}(\varphi)$ траектория начальной точки — ги-

пербола $\frac{\tilde{y}^2}{r^2} - \frac{\tilde{x}^2}{4-r^2} = 1$ с асимптотами $\tilde{x} = \pm \tilde{y} \tan \alpha$, $\tan \alpha = \sqrt{4r^2 - 1}$. Получаем схождение частиц по гиперболам до конечного круга ($r \leq 2$) и расхождение с разворотом на угол 2α .

8^0 . Экспоненциально растущее решение (40) преобразованием эквивалентности $t - \frac{1}{2}\theta \rightarrow t, j + \frac{1}{2}\theta \rightarrow j, \frac{1}{2}\theta \rightarrow \theta$ приводится к виду $\vec{x} = e^{t+2j}\vec{e}(t - \theta) + b(i)e^{-t-2j}\vec{e}(t + \theta)$, $i = 2b \sin(2\theta)$. Начальная точка $\vec{\xi} = \vec{x}(0) = (e^{2j} + be^{-2j}) \cos \theta O\vec{e}_0 + (be^{-2j} - e^{2j}) \sin \theta \vec{e}_0$, $\vec{e}(0) = O\vec{e}_0$, $O\vec{e}(0) = -\vec{e}_0$ определяет зависимости j, b от ξ, η — координат вектора $\vec{\xi}$. Движение начальной точки представим в виде $\vec{x} = \Lambda(t)\vec{\tilde{x}}$, где $\vec{\tilde{x}} = \xi \cosh t - \eta \cot \theta \sinh t$, $\tilde{y} = \eta \cosh t - \xi \tan \theta \sinh t$ — движение по гиперболе $\tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 \tan^2 \theta = \eta^2 - \xi^2 \tan^2 \theta$, матрица $\Lambda(t)$ поворачивает вектор $\vec{\tilde{x}}$ на угол t . В начальной точке частица движется в направлении вектора

$$\vec{x}'(0) = -O\vec{\xi} - \left\| \begin{array}{cc} 0 & \cot \theta \\ \tan \theta & 0 \end{array} \right\|_{\text{sym}}$$

Получаем разворот сгущающихся частиц в среде $i(\xi, \eta)$,двигающихся по спиралям растущим по экспоненциально гиперболическому закону. Начало $\vec{x} = \vec{\xi} = 0$ стоит на месте.

12. Заключение

Для двумерной неизоэнтропической идеальной газовой динамики с однопараметрической термодинамикой получены все 8 типов решений. Для этой переопределенной системы получена частично интегрируемая переопределенная цепочка дифференциальных уравнений на вспомогательные функции. Уточняются все решения этой цепочки. Каждое решение цепочки либо противоречит исходной системе, либо порождает решения с помощью конечных формул. Для каждого решения исходной системы представлены гладкие движения частиц газа для любого значения времени. Траектории могут быть параболами, кривыми с переменной выпуклостью, окружностями, кривыми, колеблющимися возле прямой, линейно растущими спиралями, конечной частью степенной кривой с периодическими колебани-

ями на ней, гиперболами, спиралями, растущими по экспоненциально гиперболическому закону.

Список литературы / References

- [1] Шанько ЮВ. Решение задачи Л.В. Овсянникова о двумерных изотермических движениях политропного газа. *Прикладная механика и техническая физика*. 2017;**58**(6):3–15. <https://doi.org/10.15372/PMTF20170601>
Shan'ko YV. Solution of the Ovsyannikov Problem of Two-Dimensional Isothermal Motion of a Polytrropic Gas. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017;**58**(6):957–967. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060013>
- [2] Овсянников ЛВ. Изобарические движения газа. *Дифференциальные уравнения*. 1994;**30**(10):1792–1799. <https://mi.mathnet.ru/de8472>
Ovsyannikov LV. The Isobaric Gas Motions. *Differential equations*. 1994;**30**(10):1792–1799. (in Russian)
- [3] Нешчадим МВ, Чупахин АП. О некоторых решениях уравнений движения сплошной среды со специальной термодинамикой. *Сибирские электронные математические известия*. 2011;**8**:317–332. <https://elibrary.ru/onrmdj>
Neshchadim MV, Chupachin AP. About Some Solutions of the Equation Moving Continuous Medium With Spacial Thermodynamics. *Siberian electronic mathematical news*. 2011;**8**:317–332. (in Russian)
- [4] Хабиров СВ. Плоские изотермические движения идеального газа без расширений. *Прикладная математика и механика*. 2014;**8**(3):411–424. <https://elibrary.ru/shltzt>
Khabirov SV. The plane isothermal motions of an ideal gas without expansions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014;**78**(3):287–297. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.09.012>
- [5] Иногамов НА. Цилиндрический аналог трохоиальных волн Герстнера. *Известия АН СССР. МЖГ*. 1984;**20**(5):145–150. <https://mzg.ipmnet.ru/ru/get/1985/5/145-150>
Inogamov NA. A cylindrical analog of trochoidal gerstner waves. *Fluid Dynamics*. 1985;**20**:791–796 (1985). <https://doi.org/10.1007/BF01050094>
- [6] Иногамов НА. Движение с «вмороженными» изобарами: трохоиальные волны и изобарическая релей-тейлоровская мода. *Доклады АН СССР*. 1984;**278**(1):57–61. <https://mi.mathnet.ru/dan9480>
Inogamov NA. Motion with “frozen” isobars: trochoidal waves and the isobaric Rayleigh–Taylor mode. *Sov. Phys. Dokl*. 1984;**29**(9):714–716.
- [7] Овсянников ЛВ. О «простых» решениях уравнений динамики политропного газа. *Прикладная механика и техническая физика*. 1999;**40**(2):5–12. <https://elibrary.ru/lxbqux>
Ovsyannikov LV. “Simple” solutions of the equations of dynamics for a polytrropic gas. *J Appl Mech Tech Phys*. 1999;**40**:191–197. <https://doi.org/10.1007/BF02468514>
- [8] Налимов ВИ, Пухначев ВВ. *Неуставившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей*. Новосибирск: Новосибирский государственный университет. 1975. 175 с.
Nalimov VI, Puchnachev VV. *The unsteady motions of an ideal fluid with a free boundary*. Novosibirsk: Novosibirsk state university. 1975. 175 p. (in Russian)
- [9] Shan'ko YuV. *Analysis of overdetermined system that describes the special class of two-dimensional motion of an ideal fluid*. [online] <http://arxiv.org/abs/1608.08186>

Сведения об авторах / Information about the Authors

Салават Валеевич Хабиров
доктор физ.-мат. наук, проф.
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа,
Россия

Salavat V. Khabirov
Sc.D. (Phys. & Math.), Prof.
Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia
habirov@anrb.ru
ORCID: 0000-0002-6126-9033