

Том 21
Номер 2

eISSN 2658–5782

2026

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

электронный
научный журнал

MULTIPHASE
SYSTEMS

online
journal

<https://multiphasesystems.online>



**Институт
механики**
им. Р.Р. Мавлютова



Численное моделирование течения anomalously термовязкой жидкости в нагреваемой каверне

Р.Р. Галикеева✉

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Российская Федерация

E-mail: galickevar@yandex.ru

Аннотация. Течения жидкостей с температурно-зависимой вязкостью представляют значительный интерес для задач гидродинамики и теплообмена. Изменение температуры может существенно влиять на реологические свойства среды, структуру потока и характер нестационарных режимов течения, что особенно важно при исследовании течений в каналах с локальными геометрическими неоднородностями, такими как каверны. В настоящей работе рассматривается течение жидкости с температурно-зависимой вязкостью в канале с нагреваемой каверной. Основной целью исследования является анализ динамики расхода жидкости и выявление особенностей нестационарных режимов течения. Предполагается, что различный характер температурной зависимости вязкости может приводить к различной динамике изменения расхода и формированию различных фазовых траекторий. Численное моделирование выполнялось в трехмерной постановке с использованием программного пакета OpenFOAM. Для решения системы уравнений использовался модифицированный решатель `simplifyFoam`, дополненный уравнением энергии и моделью температурно-зависимой вязкости. В работе рассматриваются две модели вязкости: модель с монотонным уменьшением вязкости при росте температуры и модель с anomalously температурной зависимостью. Анализ динамики течения проводился на основе временных сигналов расхода жидкости через входное сечение канала. Для исследования характера колебаний расхода использовались фазовые траектории в пространстве переменных (Q, \dot{Q}) . Производная расхода вычислялась с использованием конечно-разностных схем различного порядка точности. В результате расчетов получено, что характер динамики расхода существенно зависит от модели температурной зависимости вязкости. Полученные фазовые траектории позволяют выявить особенности формирования нестационарных режимов течения. Полученные результаты могут быть использованы при численном моделировании течений жидкостей с температурно-зависимой вязкостью и при анализе динамических режимов течения в каналах с кавернами.

Ключевые слова: anomalously термовязкая жидкость; температурная зависимость вязкости; каверна; фазовые траектории; расход жидкости; OpenFOAM

Цитирование: Галикеева РР. Численное моделирование течения anomalously термовязкой жидкости в нагреваемой каверне. *Многофазные системы*. 2026;21(2):51–58.

Numerical simulation of anomalously termoviscous fluid flow in a heated cavity

R.R. Galikeeva✉

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation

E-mail: galickevar@yandex.ru

Abstract. Flows of fluids with temperature-dependent viscosity are of considerable interest in fluid dynamics and heat transfer problems. Variations in temperature may significantly affect the rheological properties of the medium, alter the flow structure, and lead to the development of unsteady flow regimes. These effects are particularly important for channel flows with geometric irregularities such as cavities. In this paper, the flow of a fluid with temperature-dependent viscosity in a channel with a heated cavity is investigated. The main objective of the study is to analyze the dynamics of the flow rate and to identify the features of unsteady flow regimes. It is assumed that different types of temperature dependence of viscosity may lead to different dynamic behavior of the flow rate and to different structures of phase trajectories. Numerical simulations were performed in a three-dimensional formulation using the OpenFOAM software package. A modified `simplifyFoam` solver supplemented with the energy equation and a temperature-dependent viscosity model was used to solve the governing equations. Two viscosity models were considered: a model with a monotonic decrease of viscosity with increasing temperature and a model with an anomalous temperature dependence. The flow dynamics were analyzed using time series of the flow rate through the inlet cross section of the channel. Phase trajectories in the (Q, \dot{Q}) space were constructed to study the oscillatory behavior of the flow rate. The time derivative of the flow rate was evaluated using finite difference schemes of different orders of accuracy. The obtained results demonstrate that

the dynamic behavior of the flow rate strongly depends on the type of temperature dependence of viscosity. The constructed phase trajectories allow identifying characteristic features of unsteady flow regimes in the considered system. The results obtained in this work may be useful for numerical modeling of flows with temperature-dependent viscosity and for the analysis of dynamic flow regimes in channels with cavities.

Keywords: temperature-dependent viscosity; cavity flow; non-Newtonian fluids; phase trajectories; flow rate dynamics; OpenFOAM

Cite: Galikeeva RR. Numerical simulation of anomalously thermoviscous fluid flow in a heated cavity. *Multiphase Systems*. 2026;21(2):51–58.

1. Введение

Исследование течений вязких и неньютоновских жидкостей является одной из актуальных задач современной механики жидкости и газа. Подобные течения широко встречаются в различных технологических процессах, включая транспортировку вязких нефтепродуктов и полимерных растворов по трубопроводам, процессы переработки полимерных материалов, а также работу теплообменных устройств и химических реакторов. В таких системах существенную роль играет температурная зависимость вязкости жидкости. Изменение температуры может приводить к значительному изменению реологических свойств среды, что влияет на распределение скоростей, структуру течения и устойчивость режимов движения жидкости [1–3].

Классические основы механики вязких жидкостей изложены в фундаментальных работах [1, 2]. Наглядные примеры различных структур течений представлены в атласе течений жидкостей и газов [4]. Методы численного решения уравнений Навье–Стокса и основные подходы вычислительной гидродинамики подробно рассмотрены в [5, 6].

С развитием вычислительных методов большое внимание стало уделяться численному моделированию течений в каналах со сложной геометрией. Наличие каверны может приводить к формированию сложных вихревых структур и возникновению нестационарных режимов течения [7, 8].

В последние годы активно используются открытые программные комплексы вычислительной гидродинамики, среди которых широкое распространение получил пакет OpenFOAM [9]. Реализация моделей температурно-зависимой вязкости в данной среде рассматривается в работе [10].

Особый интерес представляют течения аномально термовязких жидкостей, для которых зависимость вязкости от температуры является немонотонной. В отличие от случая монотонного уменьшения вязкости при нагреве немонотонная зависимость может приводить к формированию в потоке локализованных областей повышенной вязкости, существенно влияющих на структуру течения и расход жидкости. В работе [11] рассмотрено течение жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры в кольцевом канале при заданном перепаде давления. Показано, что условия теплообмена на стенках канала могут определять процесс установления расхода жидкости, поскольку в области течения формируется локализованная зона повышенной вязкости.

Нестационарные режимы течения жидкости с немо-

нотонной температурной зависимостью вязкости в плоском канале исследовались в работе [12]. Авторами показано, что интенсивность теплообмена на стенках канала влияет на характер переходного процесса; при определенных условиях среди возможных режимов возникает колебательный режим. Эти результаты показывают, что связь между температурным полем, вязкостью и расходом может приводить к существенно нестационарной динамике даже в сравнительно простой канальной геометрии.

Исследованию течения термовязкой жидкости в канале с каверной посвящена работа [13], где показано, что температурные эффекты могут существенно изменять структуру течения и приводить к формированию нестационарных режимов. Однако динамические особенности течения жидкостей с температурно-зависимой вязкостью в каналах с кавернами остаются недостаточно изученными, особенно в трехмерной постановке. Переход к трехмерной постановке позволяет существенно обогатить общую картину течения, поскольку в этом случае становятся возможными более сложные пространственные структуры потока, недоступные в двумерном приближении.

Целью настоящей работы является выявление особенностей нестационарной динамики расхода при трехмерном течении жидкости с монотонной и немонотонной температурными зависимостями вязкости в канале с нагреваемой каверной.

2. Постановка задачи

Рассматривается течение жидкости в канале с каверной, расположенной на одной из стенок. Геометрия расчетной области представляет собой прямоугольный канал длиной L и высотой H . В нижней части канала расположена каверна кубической формы. Температура стенок постоянная, дно подогревается, что приводит к формированию температурного поля в потоке и изменению вязкости жидкости.

Жидкость рассматривается как несжимаемая. Плотность среды предполагается постоянной. Изменение реологических свойств жидкости учитывается через температурную зависимость кинематической вязкости.

Движение жидкости описывается системой уравнений сохранения массы, импульса и энергии.

Уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Уравнения движения записываются в форме урав-

нений Навье–Стокса с учетом переменной вязкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu(T) \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu(T) \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu(T) \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu(T) \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu(T) \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu(T) \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu(T) \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu(T) \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu(T) \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Перенос тепла в жидкости описывается уравнением энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Здесь v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости; p — давление; T — температура; $\nu(T)$ — кинематическая вязкость жидкости; α — коэффициент температуропроводности.

Характер течения может быть оценен с помощью безразмерных критериев. Одним из основных параметров является число Рейнольдса

$$Re = \frac{UH}{\nu},$$

где U — характерная скорость потока; H — характерный размер области; ν — кинематическая вязкость.

Для рассматриваемых параметров течения значение числа Рейнольдса соответствует ламинарному режиму.

Интенсивность теплообмена может быть охарактеризована числом Нуссельта

$$Nu = \frac{hH}{k},$$

где h — коэффициент теплоотдачи; k — коэффициент теплопроводности.

Для большинства неньютоновских жидкостей, включая полимерные растворы, смазочные материалы и некоторые нефтепродукты, характерно монотонное уменьшение вязкости с ростом температуры. Такое поведение связано с ослаблением межмолекулярных взаимодействий и увеличением подвижности частиц жидкости при нагреве.

Для описания данной зависимости используется модификация модели вязкости powerLaw, расширенная температурной зависимостью. В рамках данной модели динамическая вязкость определяется выражением:

$$\nu(T) = \nu_0 \exp [-\beta (T - T_0)],$$

где ν_0 — базовое значение вязкости при температуре T_0 ; β — температурный коэффициент, характеризующий чувствительность вязкости к изменению температуры.

Аномальная зависимость вязкости от температуры характерна для некоторых классов неньютоновских жидкостей, у которых наблюдается немонотонное изменение реологических свойств при нагреве. Такое поведение может быть связано с конкурирующими физико-химическими процессами, такими как ослабление межмолекулярных взаимодействий, процессы ассоциации молекул, гелеобразование или фазовые переходы.

Для описания такого поведения используется следующая модель температурной зависимости вязкости:

$$\nu(T) = A \exp [-\alpha (T - T_p)^2],$$

где A и α — параметры модели, определяющие высоту и ширину пика вязкости соответственно; T_p — температура, при которой достигается максимальное значение вязкости.

Расчетная область представляет собой трехмерный канал, в одной из стенок которого расположена кубическая каверна.

Высота канала составляет $H = 5$ см, высота каверны также равна 5 см, длина канала $L = 15$ см.

На входе канала ($x = 0$) и на выходе ($x = L$) задаются постоянные значения давления:

$$p(0) = 1, \quad p(L) = 0.$$

На твердых стенках области выполняются условия прилипания

$$v_x = v_y = v_z = 0.$$

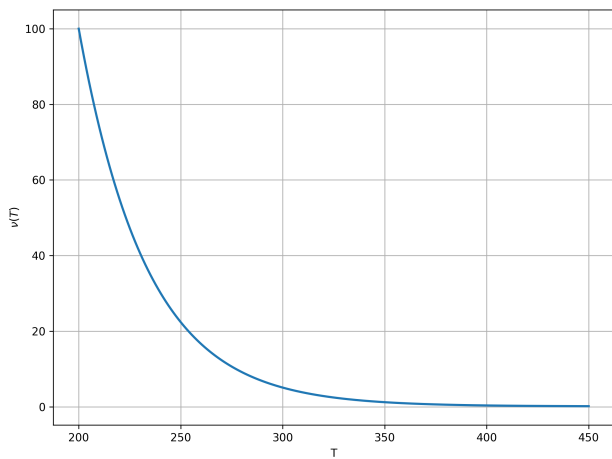
Температура на входе канала задается постоянной

$$T(x = 0) = T_{\min}.$$

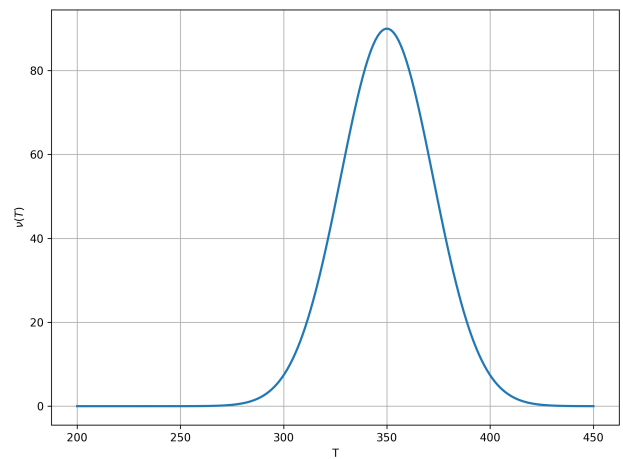
Характер температурной зависимости вязкости для используемых моделей представлен на рис. 1.

Для иллюстрации пространственного характера течения была выполнена визуализация поля скорости в расчетной области. На рис. 2 приведен центральный разрез области, окрашенный по модулю скорости, а также линии тока, построенные по трехмерному полю скорости. Видно, что в области каверны формируется циркуляционная зона, связанная с обменом жидкости между основным потоком и полостью каверны.

В процессе численного моделирования проанализирован расход жидкости через входное сечение канала. Расход вычислялся путем интегрирования нормальной компоненты скорости по площади входного сечения расчетной области. Значение расхода записывалось на каждом временном шаге расчета, что позволило получить временные зависимости расхода $Q(t)$.



(a)



(b)

Рис. 1. Зависимость вязкости от температуры: (а) монотонная температурная зависимость; (b) аномальная температурная зависимость вязкости

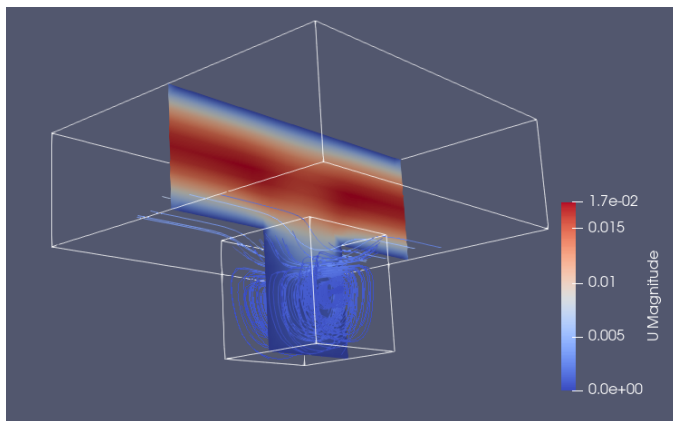


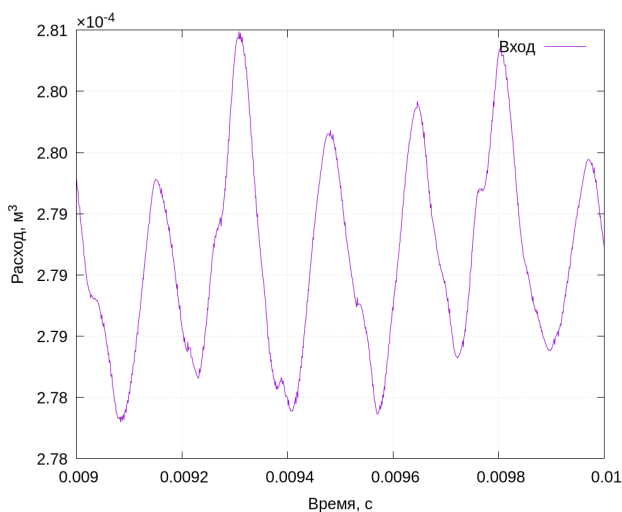
Рис. 2. Пространственная структура течения в канале с каверной для модели с монотонной температурной зависимостью вязкости

3. Результаты

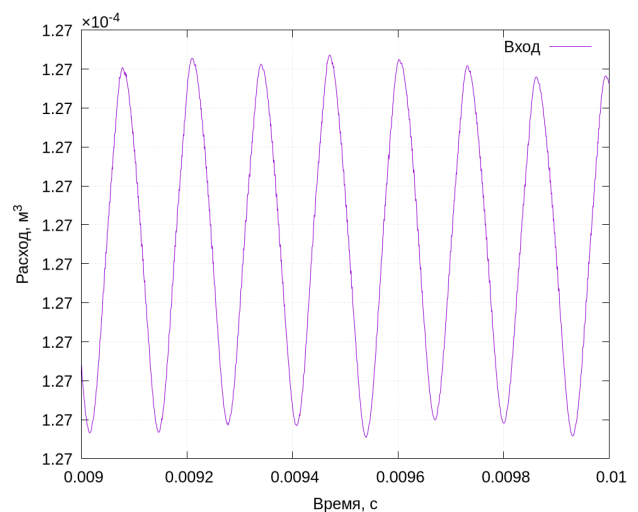
Анализ временных сигналов расхода позволяет исследовать характер динамики течения и выявить возможные колебательные режимы.

На рис. 3 представлены временные зависимости расхода жидкости для двух моделей вязкости: монотонной температурной зависимости и аномальной зависимости вязкости от температуры.

Для решения системы уравнений был использован модифицированный решатель simpleFoam, дополненный уравнением энергии и моделью температурно-зависимой вязкости. Расчеты выполнялись в трехмерной постановке с использованием метода конечных объемов. Анализ динамики течения проводился на основе временных сигналов расхода жидкости через входное сечение канала. Значение расхода $Q(t)$ записывалось на каждом временном шаге расчета, что позволило по-



(a)



(b)

Рис. 3. Временные зависимости расхода жидкости для различных моделей вязкости: (а) монотонная температурная зависимость; (b) аномальная температурная зависимость вязкости

лучить временные ряды расхода и исследовать их динамические свойства.

Для исследования характера динамики системы использовался фазовый анализ временных сигналов расхода. Фазовые траектории строились в пространстве переменных

$$\left(Q, \frac{dQ}{dt} \right),$$

где Q — расход жидкости; dQ/dt — производная расхода по времени.

Для построения фазовых траекторий необходимо вычисление производной расхода. В работе были рассмотрены три конечно-разностные аппроксимации производной: трехточечная, четырехточечная и пятиточечная схемы.

Трехточечная схема имеет вид

$$\dot{Q}_i = \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2\Delta t}$$

и обладает вторым порядком аппроксимации по шагу времени, то есть ее погрешность имеет порядок $O(\Delta t^2)$.

Четырехточечная схема записана в виде

$$\dot{Q}_i = \frac{Q_{i-2} - 6Q_{i-1} + 3Q_i + 2Q_{i+1}}{6\Delta t}$$

и имеет третий порядок аппроксимации, то есть ее погрешность имеет порядок $O(\Delta t^3)$.

Пятиточечная схема задана формулой

$$\dot{Q}_i = \frac{Q_{i-2} - 8Q_{i-1} + 8Q_{i+1} - Q_{i+2}}{12\Delta t}$$

и имеет четвертый порядок аппроксимации, ее погрешность имеет порядок $O(\Delta t^4)$.

Сравнение фазовых траекторий, построенных с использованием указанных схем, показало, что основные особенности движения сохраняются при всех трех способах вычисления производной. При этом пятиточечная схема обладает более высоким порядком аппроксимации и позволяет получить более устойчивое представление фазовой траектории. Поэтому в дальнейшем анализе использовалась пятиточечная схема.

На рис. 4 представлены фазовые траектории расхода, полученные с использованием трехточечной, четырехточечной и пятиточечной схем аппроксимации производной.

На рис. 5 представлены фазовые траектории расхода для модели вязкости с монотонной температурной зависимостью на различных стадиях развития течения.

Аналогичные фазовые траектории для модели вязкости с аномальной температурной зависимостью представлены на рис. 6.

Для уменьшения влияния высокочастотных численных колебаний на временной сигнал расхода дополнительно применялось сглаживание с использованием фильтра Савицкого–Голея. Данный метод основан на локальной полиномиальной аппроксимации данных в скользящем окне и позволяет уменьшить влияние мелкомасштабных численных колебаний без существенного изменения общей формы сигнала.

Для обеих моделей вязкости, представленных на рис. 7, использовался один и тот же способ сглаживания с одинаковыми параметрами окна и порядка полинома.

Полученные результаты позволяют проанализировать особенности динамики течения жидкости в канале с каверной при различных моделях температурной зависимости вязкости.

Как видно из графиков, представленных на рис. 3, характер изменения расхода существенно зависит от используемой модели температурной зависимости вязкости. В случае аномальной зависимости вязкости от температуры сигнал расхода демонстрирует колебательное поведение с относительно регулярной структурой. Для модели с монотонной зависимостью вязкости динамика расхода становится более сложной, что может быть связано с изменением структуры течения в области каверны и перераспределением скоростей в канале.

Построены фазовые траектории расхода с использованием различных схем аппроксимации производной (рис. 4). Дальнейший анализ фазовой динамики выполнялся с использованием пятиточечной схемы, так как данный вариант возвращает наиболее гладкую и устойчивую траекторию из рассмотренных.

Эволюция фазовых траекторий для модели с моно-

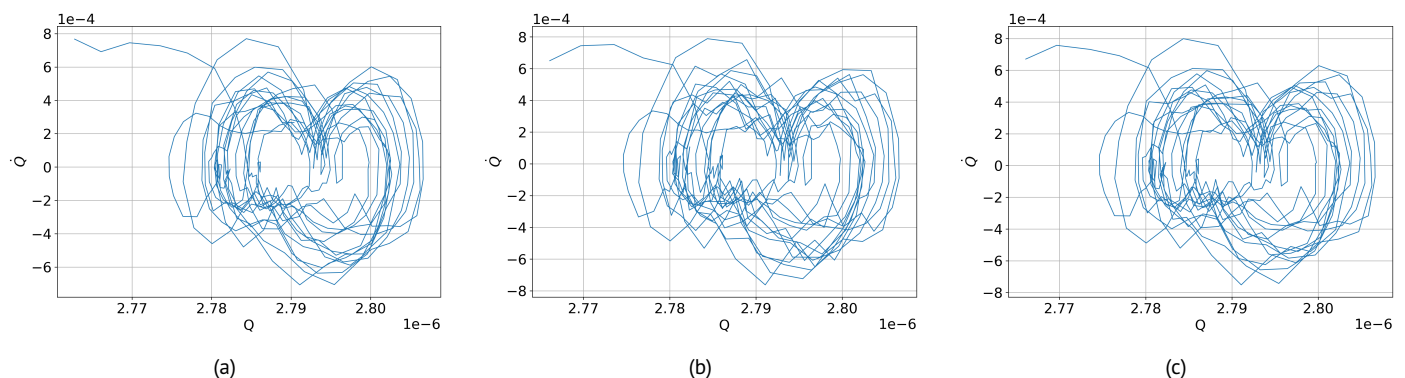


Рис. 4. Фазовые траектории расхода, полученные с использованием различных схем аппроксимации производной: (а) трехточечная схема, (б) четырехточечная схема, (с) пятиточечная схема

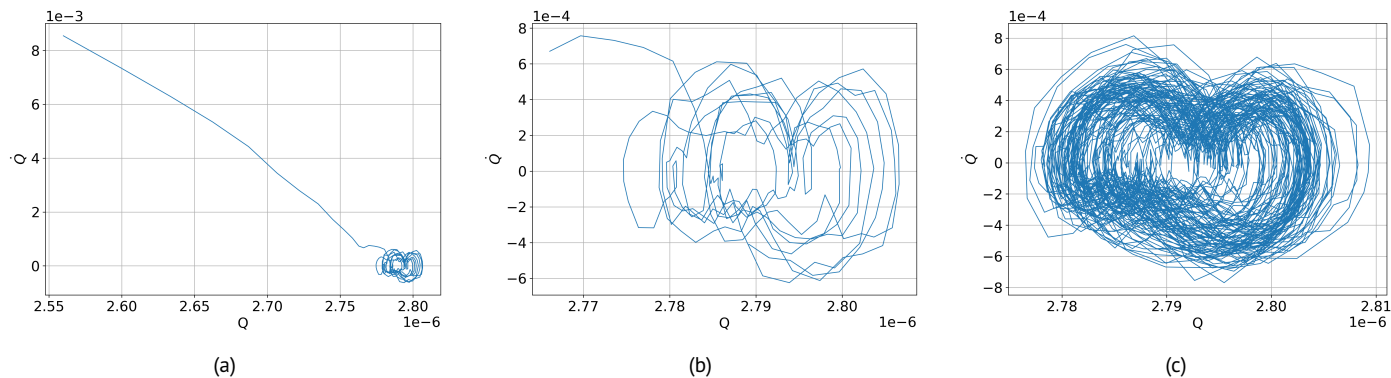


Рис. 5. Фазовые траектории расхода для модели вязкости с монотонной температурной зависимостью: (а) начальный этап течения, (б) промежуточный этап, (с) установившийся режим

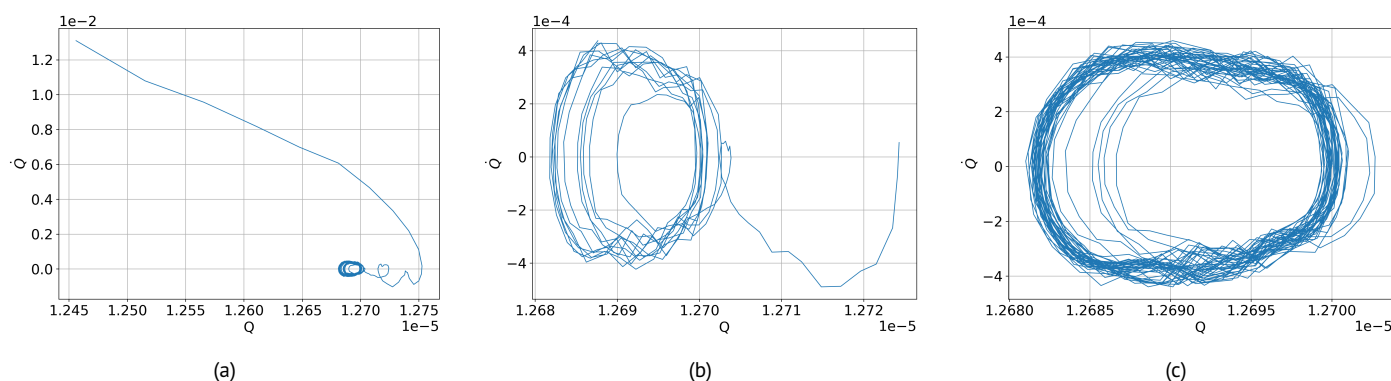


Рис. 6. Фазовые траектории расхода для модели вязкости с аномальной температурной зависимостью: (а) начальный этап течения, (б) промежуточный этап, (с) установившийся режим

тонной температурной зависимостью вязкости представлена на рис. 5. На начальном этапе течения фазовая траектория имеет неупорядоченный характер, что связано с переходным процессом и формированием структуры течения в области каверны. По мере развития течения траектория занимает более широкую область фазового пространства и приобретает сложную структуру. В установившемся режиме наблюдается квазипериодический характер изменения расхода, что проявляется в виде расширенной и неоднородной фазовой траектории.

Для модели с аномальной температурной зависимостью вязкости эволюция фазовых траекторий представлена на рис. 6. На начальной стадии также наблюдается переходный процесс, однако в установившемся режиме фазовая траектория имеет более компактный и регулярный вид. Это указывает на более упорядоченный характер колебаний расхода по сравнению со случаем монотонной температурной зависимости вязкости.

Возникновение колебаний расхода в рассматриваемой задаче связано с взаимным влиянием температурного поля, вязкости и структуры течения. Нагрев стенок каверны приводит к формированию неоднородного температурного поля. Поскольку кинематическая вязкость зависит от температуры, в области каверны возникает пространственно неоднородное распределение вязкости. Это распределение влияет на поле скорости и

интенсивность циркуляционного движения в каверне. В свою очередь изменение поля скорости изменяет перенос тепла, что приводит к дальнейшему перераспределению температуры и вязкости. Таким образом, в системе возникает обратная связь между температурой, вязкостью, скоростью и расходом жидкости.

Для модели с монотонной температурной зависимостью вязкости нагрев жидкости приводит к уменьшению вязкости вблизи нагретых стенок каверны. Области пониженной вязкости легче вовлекаются в движение, что может усиливать локальную циркуляцию и приводить к перестройке структуры потока. В результате расход через входное сечение приобретает нестационарный характер. В выполненных расчетах для этой модели фазовая траектория имеет более сложную форму, что указывает на более выраженный квазипериодический характер колебаний расхода.

В случае немонотонной температурной зависимости вязкости изменение температуры может приводить к формированию области повышенной вязкости вблизи температур, соответствующих максимуму функции $\nu(T)$. Такая область оказывает влияние на движение жидкости в каверне, изменяет интенсивность циркуляции и характер обмена между каверной и основным потоком. Поэтому колебания расхода сохраняются, однако форма фазовой траектории отличается от случая

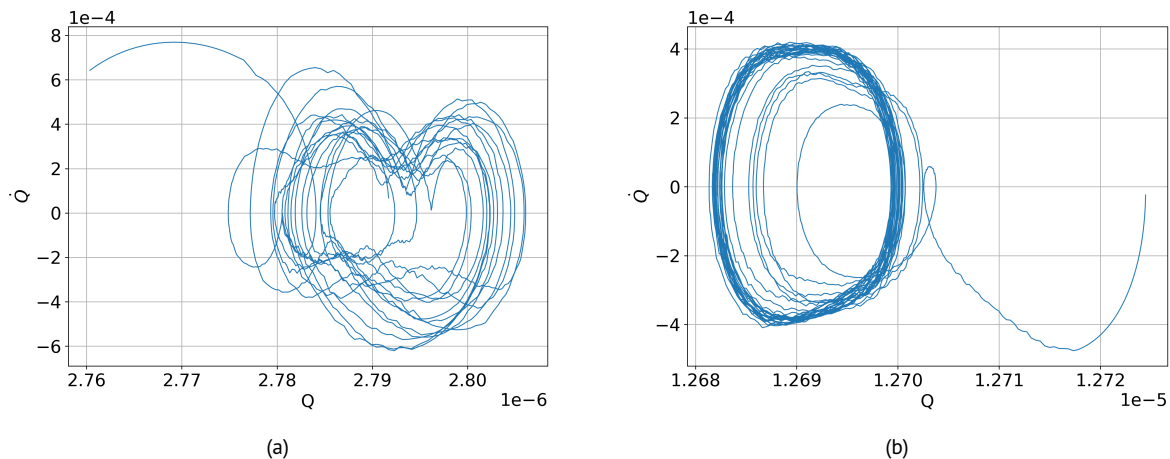


Рис. 7. Фазовые траектории расхода после сглаживания временного сигнала: (а) модель вязкости с монотонной температурной зависимостью; (б) модель вязкости с аномальной температурной зависимостью

монотонной зависимости. В рамках проведенных расчетов фазовый портрет для немонотонной модели имеет более регулярную структуру по сравнению с монотонной моделью, что указывает на различие характера перестройки течения.

Таким образом, изменение характера температурной зависимости вязкости приводит к заметному изменению структуры фазовых траекторий и динамики расхода жидкости в канале с каверной.

Результаты построения фазовых траекторий для сглаженного сигнала представлены на рис. 7. Как видно из представленных графиков, сглаживание приводит к уменьшению рассеяния точек на фазовой траектории и позволяет более четко выявить основные особенности динамики системы.

Полученные результаты показывают, что фазовый анализ временных сигналов расхода является эффективным инструментом исследования нестационарных режимов течения. Различие форм фазовых траекторий для различных моделей вязкости указывает на существенное влияние температурной зависимости реологических свойств жидкости на динамику потока в канале с каверной.

4. Заключение

В работе выполнено численное исследование течения жидкости с температурно-зависимой вязкостью в канале с нагреваемой каверной в трехмерной постановке. Моделирование проводилось с использованием модифицированного решателя `simpleFoam` в программном пакете OpenFOAM с учетом уравнения энергии и модели температурной зависимости вязкости.

Показано, что характер динамики расхода существенно зависит от используемой модели температурной зависимости вязкости. Для модели с монотонной зависимостью вязкости от температуры наблюдаются квазипериодические колебания расхода, что проявляется в виде сложной структуры фазовых траекторий. В случае аномальной зависимости вязкости фазовые траектории имеют более компактный и регулярный вид.

Полученные результаты показывают, что трехмерная постановка задачи приводит к более сложной динамике течения по сравнению с двумерным случаем. Пространственная структура потока в области каверны оказывает существенное влияние на характер изменения расхода и форму фазовых траекторий.

Проведенный фазовый анализ временных сигналов расхода позволяет эффективно исследовать нестационарные режимы течения и выявлять особенности динамики системы при различных моделях вязкости.

Таким образом, температурная зависимость вязкости является важным фактором, определяющим динамику течения жидкости в каналах со сложной геометрией.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы / References

- [1] Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ. *Теоретическая физика. Т.6: Гидродинамика*. 5-е издание. М.: Физматлит. 2001. 736 с. <https://elibrary.ru/MVANJT>
Landau LD, Lifshitz EM. *Fluid Mechanics. Vol. 6. Course of Theoretical Physics*. 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann. 1987. 539 p. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03799-1>
- [2] Лойцянский ЛГ. *Механика жидкости и газа*. 7-е издание, исправленное. М.: Дрофа. 2003. 840 с.
Loitsyanskii LG. (1966). *Mechanics of Liquids and Gases*. 7th ed. Pergamon Press. 1996. 816 p. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-05328-5>
- [3] Bird RB, Stewart WE, Lightfoot EN. *Transport Phenomena*. Rev. 2nd Ed. Wiley. 2002. 895+3 p.
- [4] Ван-Дайк М. *Альбом течений жидкостей и газов*. М.: Мир, 1986. 184 с.
Van Dyke M. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press. 1982. 176 p.
- [5] Ferziger JH, Perić M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3rd rev. ed. Berlin: Springer. 2002. 154 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>
- [6] Versteeg HK, Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. 2nd ed. Harlow: Pearson Education. 2007. 503 p.
- [7] Ghia U, Ghia KN, Shin CT. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*. 1982;48(3):387–411. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)

- [8] Shankar PN, Deshpande MD. Fluid mechanics in the driven cavity. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2000;**32**:93-136. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.32.1.93>
- [9] Weller H.G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques // *Computers in Physics*. 1998.
- [10] Payandeh M. *Implementation of a Temperature Dependent Viscosity Model in OpenFOAM*. Gothenburg: Chalmers University of Technology. 2012. 18 p. https://www.tfd.chalmers.se/~hani/kurser/OS_CFD_2012/MostafaPayandeh/ViscosityModel%20in%20openFoam%20v2.pdf
- [11] Киреев ВН, Мухутдинова АА, Урманчиев СФ. О критических условиях теплообмена при течении жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры в кольцевом канале. *Прикладная математика и механика*. 2023;**87**(3):369–378. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030062>
- Киреев ВН, Мухутдинова АА, Урманчиев СФ. On critical heat transfer conditions in the flow of a fluid with a non-monotonic temperature-dependent viscosity in an annular channel. *Fluid Dynamics*. 2023;**58**:1310–1317. <https://doi.org/10.1134/S0015462823602036>
- [12] Uрманчиев S, Киреев V. The Transient Flow of Liquid with Non-Monotonous Temperature Dependent Viscosity in a Plane Channel. *AIP Conference Proceedings*. 2017;**1906**(1):200009. <https://doi.org/10.1063/1.5012485>
- [13] Мухутдинова АА. Задача о течении термовязкой жидкости в канале с каверной, содержащей охлаждающий элемент. *Многофазные системы*. 2024;**19**(4):146–151. <https://doi.org/10.21662/mfs2024.4.022>
- Mukhutdinova AA. The problem of the flow of a thermoviscous fluid in a channel with a cavity containing a cooling element. *Multiphase Systems*. 2024;**19**(4):146–151 (in Russian).

Сведения об авторах / Information about the Authors

Рената Ринатовна Галикеева

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

Renata Rinatovna Galikeeva

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

galickeevar@yandex.ru

ORCID: [0009-0001-0418-0999](https://orcid.org/0009-0001-0418-0999)