

Том 21
Номер 2

eISSN 2658-5782

2026

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

электронный
научный журнал

MULTIPHASE
SYSTEMS

online
journal

<https://multiphasesystems.online>



**Институт
механики**
им. Р.Р. Мавлютова

Институт механики
им. Р.Р. Мавлютова
Уфимского федерального
исследовательского центра
Российской Академии наук

eISSN 2658–5782
DOI: 10.21662/mfs

ЭЛЕКТРОННЫЙ
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1994 г.
Издается 4 раза в год

до 2017: «Труды Института
механики им. Р.Р. Мавлютова
Уфимского научного
центра РАН»
до 2003: «Проблемы
механики и управления»

Редакция

Урманчев С.Ф.
главный редактор
Галимзянов М.Н.
зам. главного редактора
Насибуллаева Э.Ш.
ответственный секретарь
Михайленко К.И.
технический редактор
Налобина Е.А.
литературный редактор

Адрес издателя и редакции:
450054, г. Уфа, пр. Октября,
д. 69, лит. Ж

Учредитель: Федеральное
государственное бюджетное
научное учреждение
Уфимский федеральный
исследовательский центр
Российской академии наук

© УФИЦ РАН, 2025
© Редколлегия, 2025
© Авторы, 2025

e-mail:
multiphase.systems@mail.ru

www:
<https://multiphasesystems.online>

Главный редактор

Урманчев С.Ф. доктор физико-математических наук, профессор
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального
исследовательского центра РАН, Уфа, Российская Федерация

Редакционная коллегия

Галимзянов М.Н. *зам. гл. редактора*, доктор физико-математических наук, доцент
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального
исследовательского центра РАН, Уфа, Российская Федерация
Михайленко К.И. *зам. гл. редактора*, кандидат физико-математических наук, доцент
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального
исследовательского центра РАН, Уфа, Российская Федерация
Насибуллаева Э.Ш. *отв. секретарь*, кандидат физико-математических наук, доцент
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального
исследовательского центра РАН, Уфа, Российская Федерация
Аганин А.А. доктор физико-математических наук, профессор
Институт механики и машиностроения Федерального исследовательского
центра «Казанский научный центр РАН», Казань, Российская Федерация
Гималтдинов И.К. доктор физико-математических наук, профессор
Уфимский государственный нефтяной технический университет,
Уфа, Российская Федерация
Даринцев О.В. доктор технических наук, профессор
Институт механики и технологий, Уфа, Российская Федерация
Хабиров С.В. доктор физико-математических наук, профессор
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального
исследовательского центра РАН, Уфа, Российская Федерация

Редакционный совет

Балапанов Д.М. кандидат физико-математических наук
Центр исследований и разработок в области космических технологий (CREST),
ULB, Королевство Бельгия
Губайдуллин А.А. доктор физико-математических наук, профессор
Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича Сибирского отделения РАН,
Тюмень, Российская Федерация
Губайдуллин Д.А. доктор физико-математических наук, член-корр. РАН
Институт механики и машиностроения Федерального исследовательского
центра «Казанский научный центр РАН», Казань, Российская Федерация
Губайдуллин И.М. доктор физико-математических наук, профессор
Институт нефтехимии и катализа Уфимского федерального
исследовательского центра РАН, Уфа, Российская Федерация
Демин В.А. доктор физико-математических наук, профессор
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Россия
Мусакаев Н.Г. доктор физико-математических наук, профессор,
Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича Сибирского отделения РАН,
Тюмень, Российская Федерация
Нигматулин Р.И. доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Российская Федерация
Осипцов А.Н. доктор физико-математических наук, профессор
Научно-исследовательский институт механики Московского государственного
университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация
Панов А.В. кандидат физико-математических наук
Челябинский государственный университет,
Челябинск, Российская Федерация
Прибатурин Н.А. доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. РАН
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
Рамазанов А.Ш. доктор технических наук, профессор
Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Российская Федерация
Рыбдылова О. кандидат физико-математических наук
Университет Брайтона, Брайтон,
Соединённое Королевство Великобритании и Северной Ирландии
Смирнов Н.Н. доктор физико-математических наук, профессор
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Российская Федерация
Хуан Ч. Доктор философии
Северо-Западный политехнический университет,
Сиань, Китайская Народная Республика
Шукла П. Доктор философии
Индийский технологический институт Мадраса, Ченнаи, Республика Индия

Editor-in-chief

S.F. Urmancheev Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre of
the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation

Editorial board

M.N. Galimzyanov *deputy editor-in-chief*, Sc.D. (Phys. & Math.), Assistant Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre of
the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation
C.I. Mikhaylenko *deputy editor-in-chief*, Ph.D. (Phys. & Math.), Assistant Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre of
the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation
E.Sh. Nasibullaeva *executive secretary*, Ph.D. (Phys. & Math.), Assistant Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre of
the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation
A.A. Aganin Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Institute of Mechanics and Engineering, Federal Research Center
"Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences",
Kazan, Russian Federation
I.K. Gimaltdinov Sc.D. (Phys. & Math.), Prof.
Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation
O.V. Darintsev Sc.D. (Eng.), Professor
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation
S.V. Khabirov Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre of
the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation

Editorial council

Balapanov D.M. Ph.D. (Phys. & Math.)
Centre for Research and Engineering in Space Technologies (CREST),
The Université libre de Bruxelles, Bruxelles, the Kingdom of Belgium
A.A. Gubaidulin Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied
Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
Tyumen, Russian Federation
D.A. Gubaidulin Sc.D. (Phys. & Math.), Corresponding Member of the RAS
Institute of Mechanics and Engineering, Federal Research Center
"Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences",
Kazan, Russian Federation
I.M. Gubaydulin Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Institute of Petrochemistry and Catalysis, Ufa Federal Research Centre of
the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation
V.A. Demin Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Perm State National Research University, Perm, Russian Federation
N.G. Musakaev Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied
Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
Tyumen, Russian Federation
R.I. Nigmatulin Sc.D. (Phys. & Math.), Prof., Academician of RAS
Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation
A.N. Osiptsov Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Institute of Mechanics, M.V. Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russian Federation
A.V. Panov Ph.D. (Phys. & Math.)
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
N.A. Pribaturin Sc.D. (Phys. & Math.), Professor, Corresponding Member of the RAS
Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch of
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation
A.Sh. Ramazanov Sc.D. (Eng.), Prof.
Ufa University of Science & Technology, Ufa, Russian Federation
O. Rybdylova Ph.D. (Phys. & Math.)
University of Brighton, Brighton,
The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland
N.N. Smirnov Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
C. Huang Ph.D., Northwestern Polytechnical University,
Xi'an, the People's Republic of China
P. Shukla Ph.D., Indian Institute of Technology Madras, Department of Mathematics,
Chennai, the Republic of India

Mavlyutov Institute of Mechanics,
Ufa Federal Research Center of the
Russian Academy of Sciences

eISSN 2658-5782
DOI: 10.21662/mfs

ELECTRONIC
SCIENTIFIC JOURNAL

First published in 1994
Published 4 times a year

before 2017: "Bulletin of
Mavlyutov Institute of Mechanics
Ufa Scientific Center of RAS"
before 2003: "Issues of
Mechanics and Control"

Technical editorial board

Urmancheev S.F.
editor-in-chief
Galimzyanov M.N.
deputy editor-in-chief
Nasibullaeva E.Sh.
executive secretary
Mikhaylenko C.I.
technical editor
Nalobina E.A.
literary editor

Publisher and editorial
office Address:
450054, Ufa, Oktyabrya Prospect,
69, lit. Zh

Founder: Ufa Federal Research
Centre of the Russian Academy of
Sciences

© UFRC of RAS, 2025
© Editorial board, 2025
© The Authors, 2025

e-mail:
multiphase.systems@mail.ru

www:
<https://multiphasesystems.online>

Колонка Главного редактора

Уважаемые авторы и читатели журнала «Многофазные системы»!



Дорогие коллеги! Настало лето – традиционное для многих из нас время отпусков и отдыха. Желаю всем поправить здоровье и набраться сил для следующего этапа научных будней. Ум учёного так устроен, что несмотря на отпуск, он будет продолжать анализировать полученные результаты, но в другом режиме, как бы со стороны... В это время могут появиться новые, даже неожиданные идеи и выводы. В итоге они, безусловно, приведут к необходимости написать очередную серию статей! Приглашаю вас воспользоваться возможностью опубликовать одну из них в журнале «Многофазные системы».

В этом году 12-16 мая в г. Уфе на базе Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН (ИМех УФИЦ РАН) состоялась X Российская конференция — школа молодых учёных с международным участием «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения» (МС-2026), посвященная юбилейным датам наших выдающихся коллег — 100-летию со дня рождения чл.-корр. РАН Р.Р. Мавлютова и 75-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова.

Для участия в работе конференции было заявлено свыше шестидесяти докладов и практически все они были заслушаны в ходе мероприятия. График конференции был достаточно плотным, а многие доклады сопровождались дискуссией, следовавшей после заданных вопросов.

Знаменательно, что первый пленарный доклад на конференции МС-2026 был представлен проф. Ю.С. Первушиным, в котором он подробно изложил научную биографию легендарного ректора Уфимского авиационного института и основателя ИМех УФИЦ РАН Рыфата Рахматулловича Мавлютова. Автор доклада особо подчеркнул выдающуюся роль Р.Р. Мавлютова в преодолении кризиса и становлении ВУЗа в новых условиях. Блестяще выполняя обязанности ректора института, он с энтузиазмом вёл свои собственные исследования в области механики деформируемого твёрдого тела, создав научную школу по численному моделированию задач прочности авиационных конструкций и их элементов. Сам Ю.С. Первушин 57 лет проработал на кафедре сопротивления материалов, пройдя путь от младшего научного сотрудника до профессора и заведующего лабораторией полимерных материалов.

Тёплыми воспоминаниями о Р.Р. Мавлютове поделился чл.-корр. РАН М.А. Ильгамов.

Следует отметить, что именно Рыфат Рахматуллович является основателем нашего журнала — изначально он издавался как сборник трудов под названием «Проблемы механики и управления» (1994, 1996) во времена его руководства Институт, а затем, когда Институт получил его имя, стал выходить под названием «Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН» (до 2018 г.). Рыфату Рахматуловичу была посвящена юбилейная статья в первом номере журнала «Многофазные системы» (К юбилею Мавлютова Р.Р.).

Проф. К.Б. Сабитов в связи с собственным юбилеем рассказал о своём пути в науке и о своих учителях. В докладе он неоднократно подчеркивал значение научных исследований в преподавательской деятельности в университете. В текущем номере журнала

«Многофазные системы» вы можете ознакомиться со статьёй, посвящённой его юбилею (К юбилею Сабитова К.Б.).

Приведу тематику других пленарных выступлений. С большим докладом о проблемах механики многофазных сред в современной океанологии выступил акад. РАН Р.И. Нигматулин. Теплофизическим аспектам атомной энергетики посвятил своё выступление чл.-корр. РАН Н.А. Прибатурин. Методы математического описания течений гетерогенных жидкостей и газов с учётом логических основ и наблюдательных фактов были изложены в фундаментальном докладе проф. Ю.Д. Чашечкина. Новые результаты по исследованию динамики пузырьков в кластерах были озвучены в докладе проф. А.А. Аганина, а решение задачи о плоском движении идеального газа без расширений со специальной термодинамикой представлены в выступлении проф. С.В. Хабирова. Интересный доклад по применению нелинейных уравнений диффузии в задачах материаловедения был сделан проф. В.А. Дёминым. Методы расчёта вибрационной прочности выдвигаемых устройств подводных аппаратов были рассмотрены в работе К.А. Ковалья. Обширные результаты по экспериментальному изучению и численному моделированию волновых процессов в насыщенных пористых средах были представлены в докладах А.Т. Ахметова и проф. И.К. Гималтдинова.

На конференции был проведён конкурс молодых учёных, прибывших из разных городов России, таких как Москва, Санкт-Петербург, Долгопрудный, Жуковский, Новосибирск, Томск, Уфа, Стерлитамак. Хочу особо отметить победителей, занявших первые места в номинациях: кандидаты наук (до 35 лет включительно) — А.А. Очиров из Москвы и К.А. Коваль из Санкт-Петербурга; молодые ученые без степени — И.Д. Гришко из Новосибирска; аспиранты ИМех УФИЦ РАН — А.А. Мухутдинова.

Надеюсь, что обсуждение докладов наших молодых исследователей с ведущими учёными даст новый импульс для развития их работ, а журнал «Многофазные системы» станет традиционной площадкой для публикации представленных на конференции результатов научной работы с учётом полученных замечаний и пожеланий.

Главный редактор
научного журнала
«Многофазные системы»



Саид Федорович Урманчиев



Численное моделирование течения anomalously термовязкой жидкости в нагреваемой каверне

Р.Р. Галикеева✉

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Российская Федерация

E-mail: galickeevr@yandex.ru

Аннотация. Течения жидкостей с температурно-зависимой вязкостью представляют значительный интерес для задач гидродинамики и теплообмена. Изменение температуры может существенно влиять на реологические свойства среды, структуру потока и характер нестационарных режимов течения, что особенно важно при исследовании течений в каналах с локальными геометрическими неоднородностями, такими как каверны. В настоящей работе рассматривается течение жидкости с температурно-зависимой вязкостью в канале с нагреваемой каверной. Основной целью исследования является анализ динамики расхода жидкости и выявление особенностей нестационарных режимов течения. Предполагается, что различный характер температурной зависимости вязкости может приводить к различной динамике изменения расхода и формированию различных фазовых траекторий. Численное моделирование выполнялось в трехмерной постановке с использованием программного пакета OpenFOAM. Для решения системы уравнений использовался модифицированный решатель `simplFoam`, дополненный уравнением энергии и моделью температурно-зависимой вязкости. В работе рассматриваются две модели вязкости: модель с монотонным уменьшением вязкости при росте температуры и модель с anomalously температурной зависимостью. Анализ динамики течения проводился на основе временных сигналов расхода жидкости через входное сечение канала. Для исследования характера колебаний расхода использовались фазовые траектории в пространстве переменных (Q, \dot{Q}) . Производная расхода вычислялась с использованием конечно-разностных схем различного порядка точности. В результате расчетов получено, что характер динамики расхода существенно зависит от модели температурной зависимости вязкости. Полученные фазовые траектории позволяют выявить особенности формирования нестационарных режимов течения. Полученные результаты могут быть использованы при численном моделировании течений жидкостей с температурно-зависимой вязкостью и при анализе динамических режимов течения в каналах с кавернами.

Ключевые слова: anomalously термовязкая жидкость; температурная зависимость вязкости; каверна; фазовые траектории; расход жидкости; OpenFOAM

Цитирование: Галикеева РР. Численное моделирование течения anomalously термовязкой жидкости в нагреваемой каверне. *Многофазные системы*. 2026;21(2):51–58.

Numerical simulation of anomalously termoviscous fluid flow in a heated cavity

R.R. Galikeeva✉

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation

E-mail: galickeevr@yandex.ru

Abstract. Flows of fluids with temperature-dependent viscosity are of considerable interest in fluid dynamics and heat transfer problems. Variations in temperature may significantly affect the rheological properties of the medium, alter the flow structure, and lead to the development of unsteady flow regimes. These effects are particularly important for channel flows with geometric irregularities such as cavities. In this paper, the flow of a fluid with temperature-dependent viscosity in a channel with a heated cavity is investigated. The main objective of the study is to analyze the dynamics of the flow rate and to identify the features of unsteady flow regimes. It is assumed that different types of temperature dependence of viscosity may lead to different dynamic behavior of the flow rate and to different structures of phase trajectories. Numerical simulations were performed in a three-dimensional formulation using the OpenFOAM software package. A modified `simplFoam` solver supplemented with the energy equation and a temperature-dependent viscosity model was used to solve the governing equations. Two viscosity models were considered: a model with a monotonic decrease of viscosity with increasing temperature and a model with an anomalous temperature dependence. The flow dynamics were analyzed using time series of the flow rate through the inlet cross section of the channel. Phase trajectories in the (Q, \dot{Q}) space were constructed to study the oscillatory behavior of the flow rate. The time derivative of the flow rate was evaluated using finite difference schemes of different orders of accuracy. The obtained results demonstrate that

the dynamic behavior of the flow rate strongly depends on the type of temperature dependence of viscosity. The constructed phase trajectories allow identifying characteristic features of unsteady flow regimes in the considered system. The results obtained in this work may be useful for numerical modeling of flows with temperature-dependent viscosity and for the analysis of dynamic flow regimes in channels with cavities.

Keywords: temperature-dependent viscosity; cavity flow; non-Newtonian fluids; phase trajectories; flow rate dynamics; OpenFOAM

Cite: Galikeeva RR. Numerical simulation of anomalously termoviscous fluid flow in a heated cavity. *Multiphase Systems*. 2026;21(2):51–58.

1. Введение

Исследование течений вязких и неньютоновских жидкостей является одной из актуальных задач современной механики жидкости и газа. Подобные течения широко встречаются в различных технологических процессах, включая транспортировку вязких нефтепродуктов и полимерных растворов по трубопроводам, процессы переработки полимерных материалов, а также работу теплообменных устройств и химических реакторов. В таких системах существенную роль играет температурная зависимость вязкости жидкости. Изменение температуры может приводить к значительному изменению реологических свойств среды, что влияет на распределение скоростей, структуру течения и устойчивость режимов движения жидкости [1–3].

Классические основы механики вязких жидкостей изложены в фундаментальных работах [1, 2]. Наглядные примеры различных структур течений представлены в атласе течений жидкостей и газов [4]. Методы численного решения уравнений Навье–Стокса и основные подходы вычислительной гидродинамики подробно рассмотрены в [5, 6].

С развитием вычислительных методов большое внимание стало уделяться численному моделированию течений в каналах со сложной геометрией. Наличие каверны может приводить к формированию сложных вихревых структур и возникновению нестационарных режимов течения [7, 8].

В последние годы активно используются открытые программные комплексы вычислительной гидродинамики, среди которых широкое распространение получил пакет OpenFOAM [9]. Реализация моделей температурно-зависимой вязкости в данной среде рассматривается в работе [10].

Особый интерес представляют течения anomalously термовязких жидкостей, для которых зависимость вязкости от температуры является немонотонной. В отличие от случая монотонного уменьшения вязкости при нагреве немонотонная зависимость может приводить к формированию в потоке локализованных областей повышенной вязкости, существенно влияющих на структуру течения и расход жидкости. В работе [11] рассмотрено течение жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры в кольцевом канале при заданном перепаде давления. Показано, что условия теплообмена на стенках канала могут определять процесс установления расхода жидкости, поскольку в области течения формируется локализованная зона повышенной вязкости.

Нестационарные режимы течения жидкости с немо-

нотонной температурной зависимостью вязкости в плоском канале исследовались в работе [12]. Авторами показано, что интенсивность теплообмена на стенках канала влияет на характер переходного процесса; при определенных условиях среди возможных режимов возникает колебательный режим. Эти результаты показывают, что связь между температурным полем, вязкостью и расходом может приводить к существенно нестационарной динамике даже в сравнительно простой канальной геометрии.

Исследованию течения термовязкой жидкости в канале с каверной посвящена работа [13], где показано, что температурные эффекты могут существенно изменять структуру течения и приводить к формированию нестационарных режимов. Однако динамические особенности течения жидкостей с температурно-зависимой вязкостью в каналах с кавернами остаются недостаточно изученными, особенно в трехмерной постановке. Переход к трехмерной постановке позволяет существенно обогатить общую картину течения, поскольку в этом случае становятся возможными более сложные пространственные структуры потока, недоступные в двумерном приближении.

Целью настоящей работы является выявление особенностей нестационарной динамики расхода при трехмерном течении жидкости с монотонной и немонотонной температурными зависимостями вязкости в канале с нагреваемой каверной.

2. Постановка задачи

Рассматривается течение жидкости в канале с каверной, расположенной на одной из стенок. Геометрия расчетной области представляет собой прямоугольный канал длиной L и высотой H . В нижней части канала расположена каверна кубической формы. Температура стенок постоянная, дно подогревается, что приводит к формированию температурного поля в потоке и изменению вязкости жидкости.

Жидкость рассматривается как несжимаемая. Плотность среды предполагается постоянной. Изменение реологических свойств жидкости учитывается через температурную зависимость кинематической вязкости.

Движение жидкости описывается системой уравнений сохранения массы, импульса и энергии.

Уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Уравнения движения записываются в форме урав-

нений Навье–Стокса с учетом переменной вязкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu(T) \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu(T) \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu(T) \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu(T) \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu(T) \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu(T) \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu(T) \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu(T) \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu(T) \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Перенос тепла в жидкости описывается уравнением энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Здесь v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости; p — давление; T — температура; $\nu(T)$ — кинематическая вязкость жидкости; α — коэффициент температуропроводности.

Характер течения может быть оценен с помощью безразмерных критериев. Одним из основных параметров является число Рейнольдса

$$Re = \frac{UH}{\nu},$$

где U — характерная скорость потока; H — характерный размер области; ν — кинематическая вязкость.

Для рассматриваемых параметров течения значение числа Рейнольдса соответствует ламинарному режиму.

Интенсивность теплообмена может быть охарактеризована числом Нуссельта

$$Nu = \frac{hH}{k},$$

где h — коэффициент теплоотдачи; k — коэффициент теплопроводности.

Для большинства неньютоновских жидкостей, включая полимерные растворы, смазочные материалы и некоторые нефтепродукты, характерно монотонное уменьшение вязкости с ростом температуры. Такое поведение связано с ослаблением межмолекулярных взаимодействий и увеличением подвижности частиц жидкости при нагреве.

Для описания данной зависимости используется модификация модели вязкости powerLaw, расширенная температурной зависимостью. В рамках данной модели динамическая вязкость определяется выражением:

$$\nu(T) = \nu_0 \exp [-\beta (T - T_0)],$$

где ν_0 — базовое значение вязкости при температуре T_0 ; β — температурный коэффициент, характеризующий чувствительность вязкости к изменению температуры.

Аномальная зависимость вязкости от температуры характерна для некоторых классов неньютоновских жидкостей, у которых наблюдается немонотонное изменение реологических свойств при нагреве. Такое поведение может быть связано с конкурирующими физико-химическими процессами, такими как ослабление межмолекулярных взаимодействий, процессы ассоциации молекул, гелеобразование или фазовые переходы.

Для описания такого поведения используется следующая модель температурной зависимости вязкости:

$$\nu(T) = A \exp [-\alpha (T - T_p)^2],$$

где A и α — параметры модели, определяющие высоту и ширину пика вязкости соответственно; T_p — температура, при которой достигается максимальное значение вязкости.

Расчетная область представляет собой трехмерный канал, в одной из стенок которого расположена кубическая каверна.

Высота канала составляет $H = 5$ см, высота каверны также равна 5 см, длина канала $L = 15$ см.

На входе канала ($x = 0$) и на выходе ($x = L$) задаются постоянные значения давления:

$$p(0) = 1, \quad p(L) = 0.$$

На твердых стенках области выполняются условия прилипания

$$v_x = v_y = v_z = 0.$$

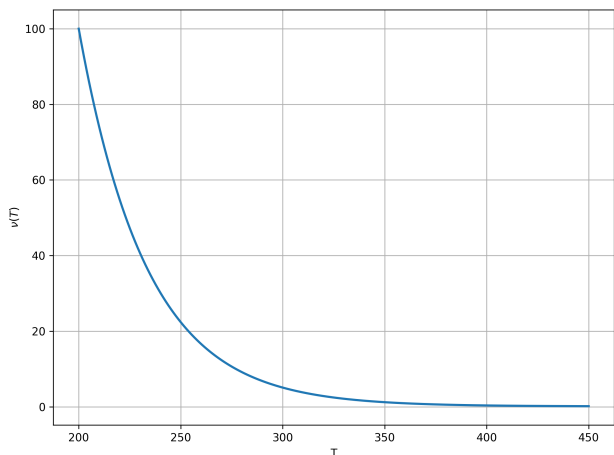
Температура на входе канала задается постоянной

$$T(x = 0) = T_{\min}.$$

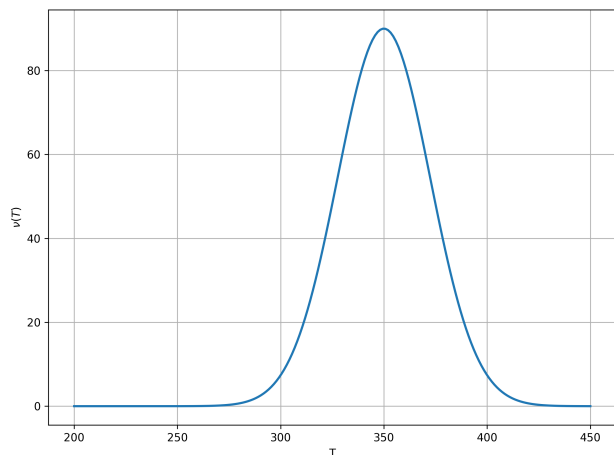
Характер температурной зависимости вязкости для используемых моделей представлен на рис. 1.

Для иллюстрации пространственного характера течения была выполнена визуализация поля скорости в расчетной области. На рис. 2 приведен центральный разрез области, окрашенный по модулю скорости, а также линии тока, построенные по трехмерному полю скорости. Видно, что в области каверны формируется циркуляционная зона, связанная с обменом жидкости между основным потоком и полостью каверны.

В процессе численного моделирования проанализирован расход жидкости через входное сечение канала. Расход вычислялся путем интегрирования нормальной компоненты скорости по площади входного сечения расчетной области. Значение расхода записывалось на каждом временном шаге расчета, что позволило получить временные зависимости расхода $Q(t)$.



(a)



(b)

Рис. 1. Зависимость вязкости от температуры: (a) монотонная температурная зависимость; (b) аномальная температурная зависимость вязкости

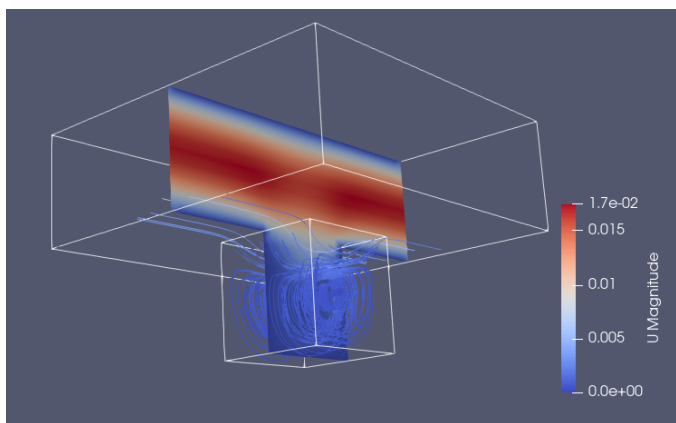


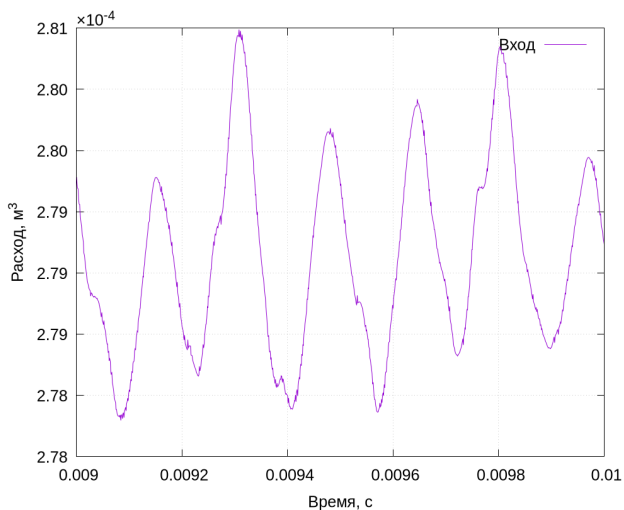
Рис. 2. Пространственная структура течения в канале с каверной для модели с монотонной температурной зависимостью вязкости

3. Результаты

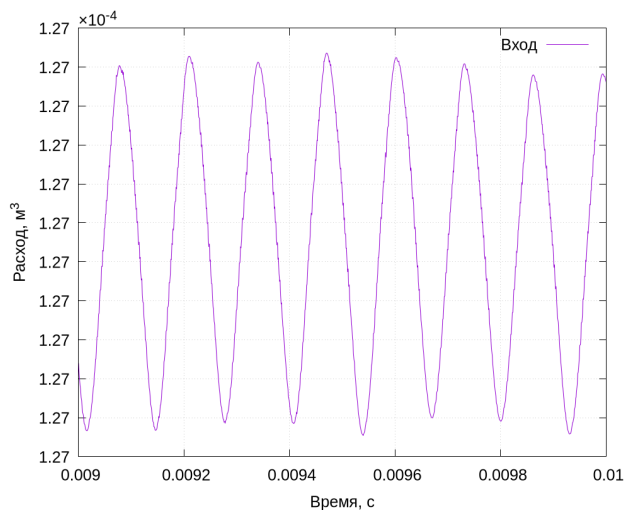
Анализ временных сигналов расхода позволяет исследовать характер динамики течения и выявить возможные колебательные режимы.

На рис. 3 представлены временные зависимости расхода жидкости для двух моделей вязкости: монотонной температурной зависимости и аномальной зависимости вязкости от температуры.

Для решения системы уравнений был использован модифицированный решатель simpleFoam, дополненный уравнением энергии и моделью температурно-зависимой вязкости. Расчеты выполнялись в трехмерной постановке с использованием метода конечных объемов. Анализ динамики течения проводился на основе временных сигналов расхода жидкости через входное сечение канала. Значение расхода $Q(t)$ записывалось на каждом временном шаге расчета, что позволило по-



(a)



(b)

Рис. 3. Временные зависимости расхода жидкости для различных моделей вязкости: (a) монотонная температурная зависимость; (b) аномальная температурная зависимость вязкости

лучить временные ряды расхода и исследовать их динамические свойства.

Для исследования характера динамики системы использовался фазовый анализ временных сигналов расхода. Фазовые траектории строились в пространстве переменных

$$\left(Q, \frac{dQ}{dt} \right),$$

где Q — расход жидкости; dQ/dt — производная расхода по времени.

Для построения фазовых траекторий необходимо вычисление производной расхода. В работе были рассмотрены три конечно-разностные аппроксимации производной: трехточечная, четырехточечная и пятиточечная схемы.

Трехточечная схема имеет вид

$$\dot{Q}_i = \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2\Delta t}$$

и обладает вторым порядком аппроксимации по шагу времени, то есть ее погрешность имеет порядок $O(\Delta t^2)$.

Четырехточечная схема записана в виде

$$\dot{Q}_i = \frac{Q_{i-2} - 6Q_{i-1} + 3Q_i + 2Q_{i+1}}{6\Delta t}$$

и имеет третий порядок аппроксимации, то есть ее погрешность имеет порядок $O(\Delta t^3)$.

Пятиточечная схема задана формулой

$$\dot{Q}_i = \frac{Q_{i-2} - 8Q_{i-1} + 8Q_{i+1} - Q_{i+2}}{12\Delta t}$$

и имеет четвертый порядок аппроксимации, ее погрешность имеет порядок $O(\Delta t^4)$.

Сравнение фазовых траекторий, построенных с использованием указанных схем, показало, что основные особенности движения сохраняются при всех трех способах вычисления производной. При этом пятиточечная схема обладает более высоким порядком аппроксимации и позволяет получить более устойчивое представление фазовой траектории. Поэтому в дальнейшем анализе использовалась пятиточечная схема.

На рис. 4 представлены фазовые траектории расхода, полученные с использованием трехточечной, четырехточечной и пятиточечной схем аппроксимации производной.

На рис. 5 представлены фазовые траектории расхода для модели вязкости с монотонной температурной зависимостью на различных стадиях развития течения.

Аналогичные фазовые траектории для модели вязкости с аномальной температурной зависимостью представлены на рис. 6.

Для уменьшения влияния высокочастотных численных колебаний на временной сигнал расхода дополнительно применялось сглаживание с использованием фильтра Савицкого–Голея. Данный метод основан на локальной полиномиальной аппроксимации данных в скользящем окне и позволяет уменьшить влияние мелкомасштабных численных колебаний без существенного изменения общей формы сигнала.

Для обеих моделей вязкости, представленных на рис. 7, использовался один и тот же способ сглаживания с одинаковыми параметрами окна и порядка полинома.

Полученные результаты позволяют проанализировать особенности динамики течения жидкости в канале с каверной при различных моделях температурной зависимости вязкости.

Как видно из графиков, представленных на рис. 3, характер изменения расхода существенно зависит от используемой модели температурной зависимости вязкости. В случае аномальной зависимости вязкости от температуры сигнал расхода демонстрирует колебательное поведение с относительно регулярной структурой. Для модели с монотонной зависимостью вязкости динамика расхода становится более сложной, что может быть связано с изменением структуры течения в области каверны и перераспределением скоростей в канале.

Построены фазовые траектории расхода с использованием различных схем аппроксимации производной (рис. 4). Дальнейший анализ фазовой динамики выполнялся с использованием пятиточечной схемы, так как данный вариант возвращает наиболее гладкую и устойчивую траекторию из рассмотренных.

Эволюция фазовых траекторий для модели с моно-

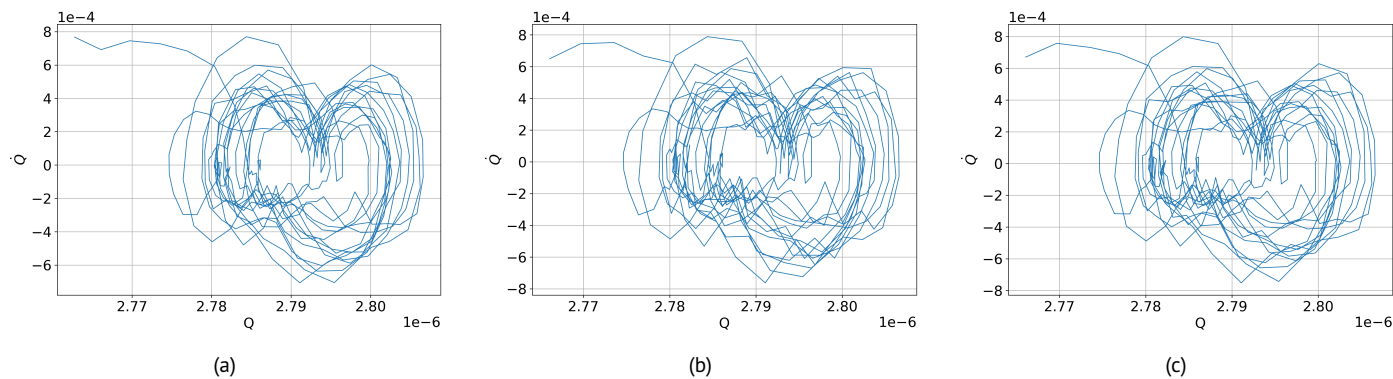


Рис. 4. Фазовые траектории расхода, полученные с использованием различных схем аппроксимации производной: (а) трехточечная схема, (б) четырехточечная схема, (с) пятиточечная схема

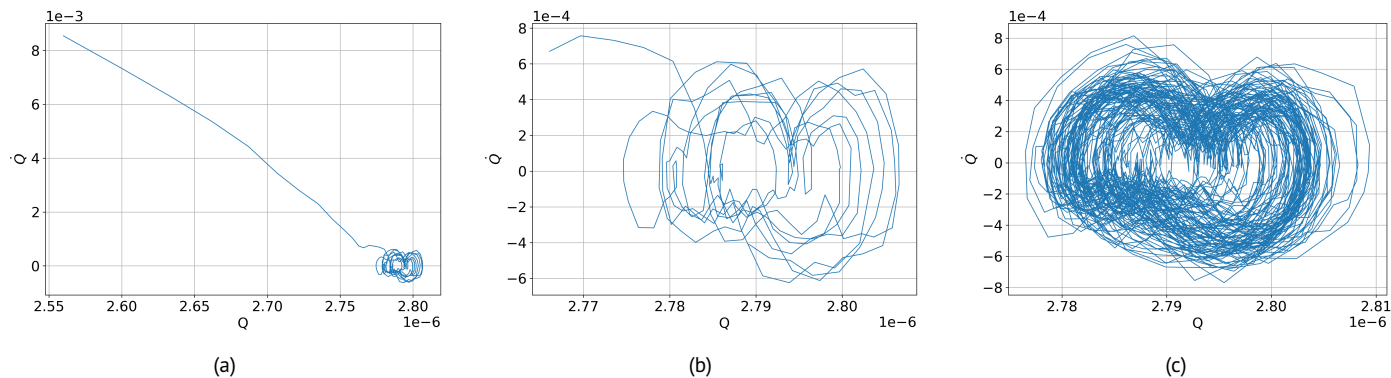


Рис. 5. Фазовые траектории расхода для модели вязкости с монотонной температурной зависимостью: (а) начальный этап течения, (б) промежуточный этап, (с) установившийся режим

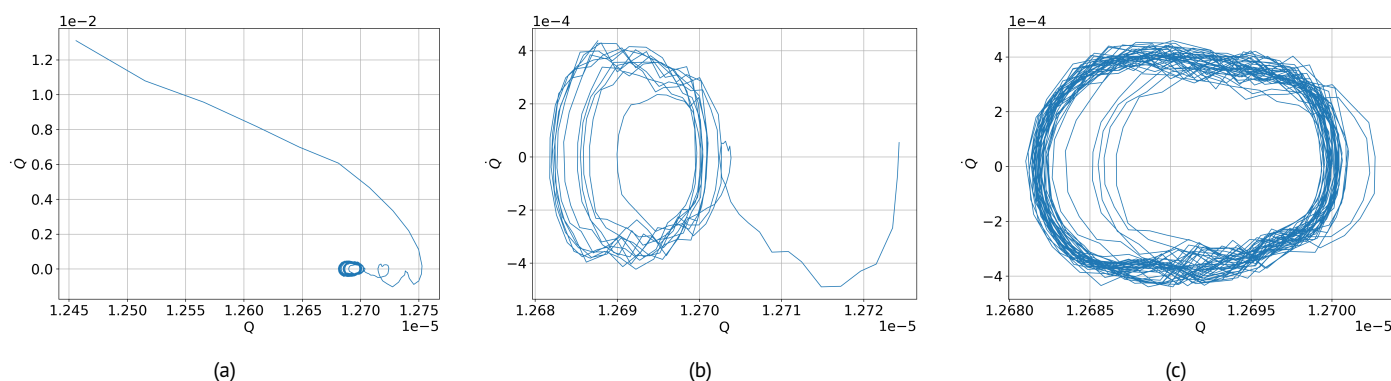


Рис. 6. Фазовые траектории расхода для модели вязкости с аномальной температурной зависимостью: (а) начальный этап течения, (б) промежуточный этап, (с) установившийся режим

тонной температурной зависимостью вязкости представлена на рис. 5. На начальном этапе течения фазовая траектория имеет неупорядоченный характер, что связано с переходным процессом и формированием структуры течения в области каверны. По мере развития течения траектория занимает более широкую область фазового пространства и приобретает сложную структуру. В установившемся режиме наблюдается квазипериодический характер изменения расхода, что проявляется в виде расширенной и неоднородной фазовой траектории.

Для модели с аномальной температурной зависимостью вязкости эволюция фазовых траекторий представлена на рис. 6. На начальной стадии также наблюдается переходный процесс, однако в установившемся режиме фазовая траектория имеет более компактный и регулярный вид. Это указывает на более упорядоченный характер колебаний расхода по сравнению со случаем монотонной температурной зависимости вязкости.

Возникновение колебаний расхода в рассматриваемой задаче связано с взаимным влиянием температурного поля, вязкости и структуры течения. Нагрев стенок каверны приводит к формированию неоднородного температурного поля. Поскольку кинематическая вязкость зависит от температуры, в области каверны возникает пространственно неоднородное распределение вязкости. Это распределение влияет на поле скорости и

интенсивность циркуляционного движения в каверне. В свою очередь изменение поля скорости изменяет перенос тепла, что приводит к дальнейшему перераспределению температуры и вязкости. Таким образом, в системе возникает обратная связь между температурой, вязкостью, скоростью и расходом жидкости.

Для модели с монотонной температурной зависимостью вязкости нагрев жидкости приводит к уменьшению вязкости вблизи нагретых стенок каверны. Области пониженной вязкости легче вовлекаются в движение, что может усиливать локальную циркуляцию и приводить к перестройке структуры потока. В результате расход через входное сечение приобретает нестационарный характер. В выполненных расчетах для этой модели фазовая траектория имеет более сложную форму, что указывает на более выраженный квазипериодический характер колебаний расхода.

В случае немонотонной температурной зависимости вязкости изменение температуры может приводить к формированию области повышенной вязкости вблизи температур, соответствующих максимуму функции $\nu(T)$. Такая область оказывает влияние на движение жидкости в каверне, изменяет интенсивность циркуляции и характер обмена между каверной и основным потоком. Поэтому колебания расхода сохраняются, однако форма фазовой траектории отличается от случая

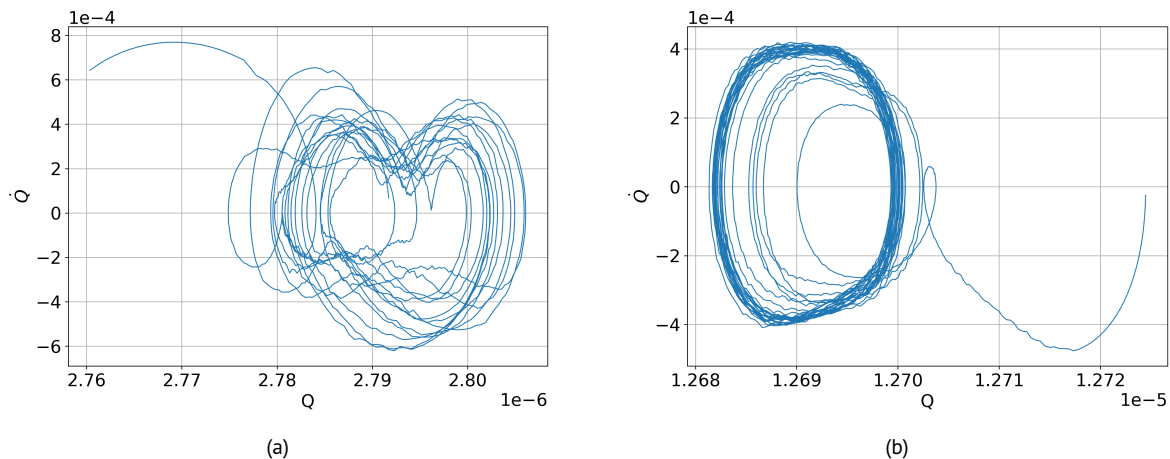


Рис. 7. Фазовые траектории расхода после сглаживания временного сигнала: (а) модель вязкости с монотонной температурной зависимостью; (б) модель вязкости с аномальной температурной зависимостью

монотонной зависимости. В рамках проведенных расчетов фазовый портрет для немонотонной модели имеет более регулярную структуру по сравнению с монотонной моделью, что указывает на различие характера перестройки течения.

Таким образом, изменение характера температурной зависимости вязкости приводит к заметному изменению структуры фазовых траекторий и динамики расхода жидкости в канале с каверной.

Результаты построения фазовых траекторий для сглаженного сигнала представлены на рис. 7. Как видно из представленных графиков, сглаживание приводит к уменьшению рассеяния точек на фазовой траектории и позволяет более четко выявить основные особенности динамики системы.

Полученные результаты показывают, что фазовый анализ временных сигналов расхода является эффективным инструментом исследования нестационарных режимов течения. Различие форм фазовых траекторий для различных моделей вязкости указывает на существенное влияние температурной зависимости реологических свойств жидкости на динамику потока в канале с каверной.

4. Заключение

В работе выполнено численное исследование течения жидкости с температурно-зависимой вязкостью в канале с нагреваемой каверной в трехмерной постановке. Моделирование проводилось с использованием модифицированного решателя `simpleFoam` в программном пакете OpenFOAM с учетом уравнения энергии и модели температурной зависимости вязкости.

Показано, что характер динамики расхода существенно зависит от используемой модели температурной зависимости вязкости. Для модели с монотонной зависимостью вязкости от температуры наблюдаются квазипериодические колебания расхода, что проявляется в виде сложной структуры фазовых траекторий. В случае аномальной зависимости вязкости фазовые траектории имеют более компактный и регулярный вид.

Полученные результаты показывают, что трехмерная постановка задачи приводит к более сложной динамике течения по сравнению с двумерным случаем. Пространственная структура потока в области каверны оказывает существенное влияние на характер изменения расхода и форму фазовых траекторий.

Проведенный фазовый анализ временных сигналов расхода позволяет эффективно исследовать нестационарные режимы течения и выявлять особенности динамики системы при различных моделях вязкости.

Таким образом, температурная зависимость вязкости является важным фактором, определяющим динамику течения жидкости в каналах со сложной геометрией.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы / References

- [1] Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ. *Теоретическая физика. Т.6: Гидродинамика*. 5-е издание. М.: Физматлит. 2001. 736 с. <https://elibrary.ru/MVANJT>
Landau LD, Lifshitz EM. *Fluid Mechanics. Vol. 6. Course of Theoretical Physics*. 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann. 1987. 539 p. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03799-1>
- [2] Лойцянский ЛГ. *Механика жидкости и газа*. 7-е издание, исправленное. М.: Дрофа. 2003. 840 с.
Loitsyanski LG. (1966). *Mechanics of Liquids and Gases*. 7th ed. Pergamon Press. 1996. 816 p. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-05328-5>
- [3] Bird RB, Stewart WE, Lightfoot EN. *Transport Phenomena*. Rev. 2nd Ed. Wiley. 2002. 895+3 p.
- [4] Ван-Дайк М. *Альбом течений жидкостей и газов*. М.: Мир, 1986. 184 с.
Van Dyke M. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press. 1982. 176 p.
- [5] Ferziger JH, Perić M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3rd rev. ed. Berlin: Springer. 2002. 154 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>
- [6] Versteeg HK, Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. 2nd ed. Harlow: Pearson Education. 2007. 503 p.
- [7] Ghia U, Ghia KN, Shin CT. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*. 1982;48(3):387–411. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)

- [8] Shankar PN, Deshpande MD. Fluid mechanics in the driven cavity. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2000;**32**:93-136. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.32.1.93>
- [9] Weller H.G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques // *Computers in Physics*. 1998.
- [10] Payandeh M. *Implementation of a Temperature Dependent Viscosity Model in OpenFOAM*. Gothenburg: Chalmers University of Technology. 2012. 18 p. https://www.tfd.chalmers.se/~hani/kurser/OS_CFD_2012/MostafaPayandeh/ViscosityModel%20in%20openFoam%20v2.pdf
- [11] Киреев ВН, Мухутдинова АА, Урманчиев СФ. О критических условиях теплообмена при течении жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры в кольцевом канале. *Прикладная математика и механика*. 2023;**87**(3):369–378. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030062>
- Киреев ВН, Мухутдинова АА, Урманчиев СФ. On critical heat transfer conditions in the flow of a fluid with a non-monotonic temperature-dependent viscosity in an annular channel. *Fluid Dynamics*. 2023;**58**:1310–1317. <https://doi.org/10.1134/S0015462823602036>
- [12] Uрманчиев S, Киреев V. The Transient Flow of Liquid with Non-Monotonous Temperature Dependent Viscosity in a Plane Channel. *AIP Conference Proceedings*. 2017;**1906**(1):200009. <https://doi.org/10.1063/1.5012485>
- [13] Мухутдинова АА. Задача о течении термовязкой жидкости в канале с каверной, содержащей охлаждающий элемент. *Многофазные системы*. 2024;**19**(4):146–151. <https://doi.org/10.21662/mfs2024.4.022>
- Mukhutdinova AA. The problem of the flow of a thermoviscous fluid in a channel with a cavity containing a cooling element. *Multiphase Systems*. 2024;**19**(4):146–151 (in Russian).

Сведения об авторах / Information about the Authors

Рената Ринатовна Галикеева

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

Renata Rinatovna Galikeeva

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

galickeevar@yandex.ru

ORCID: [0009-0001-0418-0999](https://orcid.org/0009-0001-0418-0999)



Моделирование гидродинамических исследований со ступенчатым изменением давления в низкопроницаемых коллекторах с трещиной гидроразрыва

А.Я. Тимершаехова, М.Р. Губайдуллин✉, А.Я. Давлетбаев, З.С. Мухаметова

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Российская Федерация

E-mail: fir_bmf@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается как выбор типа граничных условий в математической модели влияет на результаты интерпретации данных гидродинамических исследований скважин (ГДИС) со ступенчатым изменением забойного давления, анализируемых по методу построения индикаторной диаграммы (ИД). Эта задача особенно актуальна для низкопроницаемых коллекторов с трещинами гидроразрыва пласта (ГРП). Цель работы – исследовать особенности применения метода ИД при разных условиях на границах пласта и подобрать оптимальную продолжительность стадий ГДИС для повышения достоверности интерпретации. При моделировании притока жидкости в добывающую скважину с трещиной ГРП рассчитано семь стадий работы скважины при забойном давлении от 5 до 6.5 МПа и длительностью каждой стадии от 5 до 30 суток. Результаты показали, что если на границе пласта поддерживается постоянное давление, то длительность режимов почти не влияет на результаты интерпретации ГДИС методом ИД. В пласте с непроницаемой границей увеличение длительности стадий приводит к снижению достоверности аппроксимации зависимости давления от величины притока из-за влияния границ модели. Для исключения эффекта границ для скважин в пластах с непроницаемыми границами рекомендуется выбирать минимальную продолжительность стадий, при которой приток жидкости в скважину становится установившимся. Полученные выводы полезны при планировании ГДИС со ступенчатым изменением давления в скважине.

Ключевые слова: гидродинамические исследования скважин; индикаторная диаграмма; граничные условия; пластовое давление; радиус исследования; коэффициент продуктивности

Цитирование: Тимершаехова АЯ, Губайдуллин МР, Давлетбаев АЯ, Мухаметова ЗС. Моделирование гидродинамических исследований со ступенчатым изменением давления в низкопроницаемых коллекторах с трещиной гидроразрыва. *Многофазные системы*. 2026;21(2):59–64.

Modelling of well tests with stepwise pressure changes in low-permeability reservoirs with a hydraulic fracture

A.Ya. Timershaehova, M.R. Gubaidullin✉, A.Ya. Davletbaev, Z.S. Mukhametova

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation

E-mail: fir_bmf@mail.ru

Abstract. The paper examines how the choice of the type of boundary conditions in a mathematical model affects the results of interpretation of data from well tests with a stepwise change in bottom-hole pressure, analyzed by the method of constructing an indicator diagram (ID). This task is especially relevant for low-permeability reservoirs with fractured hydraulic fracturing. The purpose of the work is to determine the features of the application of the ID method under different conditions at the boundaries of the reservoir and to select the optimal duration of the stages of the well test, in order to increase the reliability of the interpretation. When modeling the flow of liquid into a producing well with a fractured hydraulic fracturing, seven stages of well operation were calculated at a bottom-hole pressure from 5 to 6.5 MPa and the duration of each stage from 5 to 30 days. The results showed that if constant pressure is maintained at the reservoir boundary, the duration of the modes has almost no effect on the results of the interpretation of the well test by the ID method. In a reservoir with an impenetrable boundary, an increase in the duration of the stages leads to a decrease in the reliability of the approximation of the pressure dependence on the inflow due to the influence of the boundaries of the model. To eliminate the effect of boundaries for wells in formations with impenetrable boundaries, it is recommended to choose the minimum duration of the stages at which the flow of liquid into the well becomes steady. These conclusions are useful when planning a stepwise pressure change in a well.

Keywords: well test; indicator diagram; boundary conditions; reservoir pressure; radius of study; productivity coefficient

Cite: Timershaehova AYa, Gubaidullin MR, Davletbaev AYa, Mukhametova ZS. Modelling of well tests with stepwise pressure changes in low-permeability reservoirs with a hydraulic fracture. *Multiphase Systems*. 2026;21(2):59–64.

1. Введение

Гидродинамические исследования скважин являются ключевым элементом мониторинга разработки месторождений, поскольку позволяют получить данные о фильтрационных свойствах продуктивных горизонтов, состоянии призабойной зоны и влиянии границ пласта и скважин окружения [1–4].

Одним из распространенных малозатратных методов гидродинамических исследований скважин (ГДИС) является исследование со ступенчатым изменением давления в скважине, которое интерпретируется методом построения индикаторной диаграммы (ИД). Этот метод ГДИС применяется для определения продуктивности скважины и пластового давления [3]. Классический подход, основанный на замерах давления и величины притока в скважине на установившихся режимах, дает возможность построить индикаторную кривую и рассчитать коэффициент продуктивности скважины [3, 5].

Наибольшие сложности при интерпретации ГДИС возникают в низкопроницаемых коллекторах, разрабатываемых преимущественно с применением гидроразрыва пласта (ГРП). Для скважин с трещиной ГРП характерно возникновение фильтрационных потоков, требующих применения специализированных математических моделей [6]. В работе [3] излагаются теоретические и практические аспекты ГДИС для низкопроницаемых коллекторов. Настоящая работа посвящена изучению того, как условия на границе пласта влияют на результаты интерпретации ГДИС методом индикаторной диаграммы.

2. Постановка задачи

Моделируется работа добывающей скважины, расположенной в центре пласта размерами $2L_x \times 2L_y$, с трещиной гидроразрыва пласта (рис. 1) полудлиной X_f , раскрытием w_f , проницаемостью k_f и полностью вскрывающей пласт толщиной h .

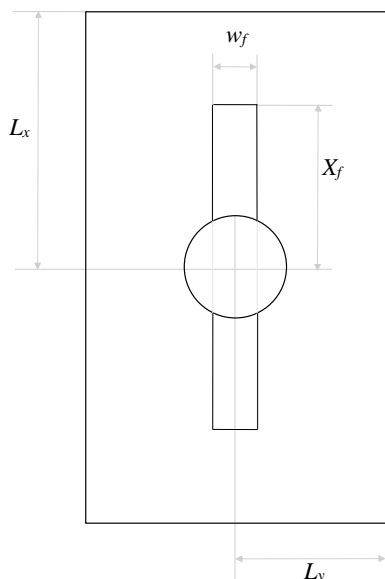


Рис. 1. Геометрия задачи

Фильтрация нефти в низкопроницаемом продуктивном пласте описывается двумерным уравнением пьезопроводности [6]:

$$\phi_m c_{mt} \frac{\partial P_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_{m_x}}{\mu} \frac{\partial P_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_{m_y}}{\mu} \frac{\partial P_m}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где ϕ_m — пористость пласта; c_{mt} — сжимаемость пласта; k_{m_x} и k_{m_y} — проницаемость пласта в направлениях x и y ; μ — вязкость жидкости; P_m — давление в пласте.

Распределение давления в трещине гидроразрыва описывается уравнением

$$\phi_f c_{ft} \frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_{f_x}}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_{f_y}}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial y} \right). \quad (2)$$

где ϕ_f — пористость трещины; c_{ft} — сжимаемость трещины; k_{f_x} и k_{f_y} — проницаемость трещины в направлениях x и y ; P_f — давление в трещине.

В начальный момент времени в пласте и трещине задано давление:

$$P_m \Big|_{t=0} = P_f \Big|_{t=0} = P_0. \quad (3)$$

На границе трещина–пласт заданы условия равенства давлений и потоков:

$$\begin{aligned} P_m \Big|_{y=\pm w_f/2} &= P_f \Big|_{y=\pm w_f/2}, \quad -X_f \leq x \leq X_f, \\ P_m \Big|_{x=\pm X_f} &= P_f \Big|_{x=\pm X_f}, \quad -\frac{w_f}{2} \leq y \leq \frac{w_f}{2}, \\ \frac{k_{f_y}}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial y} \Big|_{y=\pm w_f/2} &= \frac{k_{m_y}}{\mu} \frac{\partial P_m}{\partial y} \Big|_{y=\pm w_f/2}, \\ &-X_f \leq x \leq X_f, \\ \frac{k_{f_x}}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial x} \Big|_{x=\pm X_f} &= \frac{k_{m_x}}{\mu} \frac{\partial P_m}{\partial x} \Big|_{x=\pm X_f}, \\ &-\frac{w_f}{2} \leq y \leq \frac{w_f}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Работа скважины контролируется забойным давлением, которое может изменяться со временем

$$P_f \Big|_{x=0, y=0} = P_w(t). \quad (5)$$

В зависимости от принимаемого типа граничных условий на контуре расчетной области задаются либо условия непротекания:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_m}{\partial x} \Big|_{x=-L_x} &= \frac{\partial P_m}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0, \\ \frac{\partial P_m}{\partial y} \Big|_{y=-L_y} &= \frac{\partial P_m}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

либо условия постоянства давления

$$P_m \Big|_{x=-L_x} = P_m \Big|_{y=-L_y} = P_m \Big|_{x=L_x} = P_m \Big|_{y=L_y} = P_0. \quad (7)$$

Таблица 1. Параметры пласта, пластовой жидкости и трещины

Параметр	Обозначение	Величина	Единица измерения
Проницаемость пласта	k_m	$1 \cdot 10^{-15}$	m^2
Пористость	$\phi_f = \phi_m$	0.2	
Сжимаемость системы в трещине и в пласте	$c_{ft} = c_{mt}$	0.0004	$MПа^{-1}$
Толщина пласта	h	20	м
Вязкость	μ	0.001	$Па \cdot c$
Проницаемость трещины	$k_{fx} = k_{fy} = k_f$	$100 \cdot 10^{-12}$	m^2
Проводимость трещины	$F_C = k_f w_f$	$5 \cdot 10^{-13}$	m^3
Безразмерная проводимость трещины	$F_{CD} = \frac{k_f w_f}{k_m X_f}$	5	
Расстояние до границ пласта	L_x, L_y	250, 150	м
Начальное пластовое давление	P_0	25	$MПа$

Численное моделирование проведено для краевых задач (1)–(7) при каждой из указанных постановок с особенностями построения расчетной сетки [6]. Тестирование результатов моделирования проведено путем сравнения со специализированным программным обеспечением «РН-ВЕГА» [7], а также аналитическими решениями [8–11].

3. Моделирование ГДИС со ступенчатым изменением стадий притока для границы постоянного давления

При проведении ГДИС методом ИД обычно реализуется ступенчатое изменение режима работы скважины — последовательное повышение или понижение забойного давления. Согласно методике проведения исследования продолжительность каждого режимов должна быть одинаковой, а величина притока и давление в скважине на каждой стадии — выйти на установившийся режим притока.

По завершении измерений значения величин притока и давления, зафиксированные в конце каждой стадии, наносятся на график в координатах «давление–величина притока». Для интерпретации полученной индикаторной диаграммы используется формула Дюпюи, которая предполагает линейную зависимость давления в скважине от величины притока на стадиях:

$$P_w = -\frac{\mu}{2\pi k_m h} Q \left(\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) + s \right) + P_0, \tag{8}$$

где Q — величина притока в скважине; r_w — радиус скважины; r_e — радиус контура питания; s — скин-фактор для случая с трещиной бесконечной проводимости $s = -\ln(X_f/2r_w)$ [12], для трещины конечной проводимости $s = -\ln(r_{wa}/r_w)$ [13], $u = \ln F_{CD}$, а

$$r_{wa} = X_f \exp \left(-\frac{1.65 - 0.328u + 0.116u^2}{1 + 0.18u + 0.064u^2 + 0.05u^3} \right).$$

С целью выявления особенностей применимости метода ИД при различных граничных условиях была выполнена серия расчетов на описанной выше модели. Параметры пласта, флюида и трещины соответствуют

значениям, приведенным в табл. 1. Во всех расчетах количество режимов составляло 7, а давление варьировалось в диапазоне от 5 до 6.5 МПа.

Результаты интерпретации для различных длительностей режимов с использованием условия на границе пласта (7) сведены в табл. 2, а соответствующие индикаторные диаграммы представлены на рис. 2.

Из материалов, представленных на рис. 2 и в табл. 2, видно, что при использовании граничного условия постоянного давления (7) длительность режимов исследования не оказывает существенного влияния ни на результаты интерпретации ГДИС методом ИД, ни на величину аппроксимации зависимости давления от величины притока в скважине (R^2). Исключение составляет случай с продолжительностью стадий 5 суток, для которого фиксируется наибольшее отклонение. Это соответствует классическим представлениям: увеличение длительности

Таблица 2. Результаты интерпретации индикаторных диаграмм (рис. 2), полученных для различной длительности режимов при граничном условии постоянного давления

Δt , сут	$K_{прод}$, $m^3/сут \cdot MПа$	P_0 , МПа	R^2
5	6.67	24.688	0.999573
10	6.55	25.090	0.999993
20	6.55	25.105	0.999946
30	6.55	25.089	0.999938

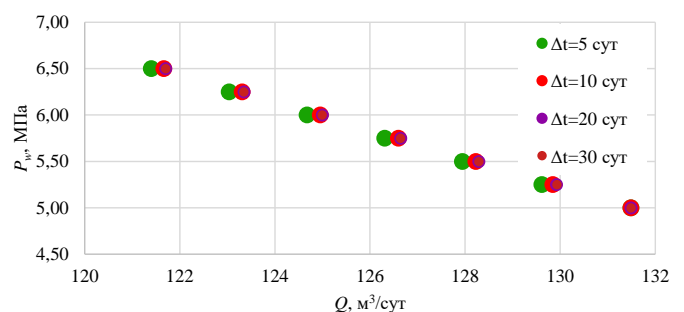


Рис. 2. Индикаторные диаграммы, соответствующие различным длительностям стадий, рассчитанные с использованием граничного условия постоянного давления

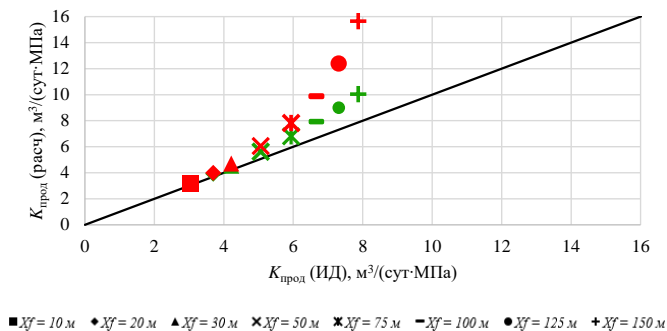


Рис. 3. Сопоставление коэффициентов продуктивности, рассчитанных по формулам Ecnomides (зеленые маркеры) и Prats (красные маркеры), с эталонными значениями для границы пласта с постоянным давлением (7)

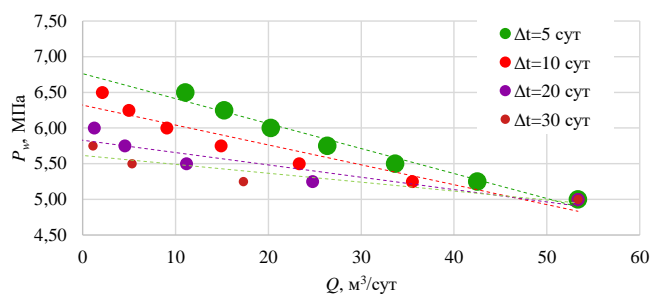


Рис. 4. Индикаторные диаграммы, рассчитанные для различных длительностей режимов с использованием условия непротекания на границе пласта (6)

режимов при использовании метода ИД способствует повышению точности и достоверности интерпретации, так как линейная связь забойного давления и дебита (8) справедлива для установившихся режимов течения.

Далее проведена серия расчетов, во время которых длительность режимов была фиксированной (5 сут), но варьировалась полудлина трещин ГРП (от 10 до 150 м). По результатам расчетов проведен анализ ИД и получены соответствующие коэффициенты продуктивности (рис. 3).

На рис. 3 представлено сравнение коэффициентов продуктивности, вычисленных по формулам Ecnomides для трещины конечной проводимости [13] и Prats для трещины бесконечной проводимости [12], с эталонными значениями. Установлено, что в определенном диапазоне полудлин трещин обе расчетные методики демонстрируют хорошее согласие с эталоном. Отклонения наблюдаются преимущественно при больших длинах трещин. Это объясняется тем, что с увеличением полудлины трещина приближается к границе пласта, что вносит искажения в классические аналитические зависимости, не учитывающие эффекты ограниченности пласта. Кроме того, выражение для трещины с бесконечной проводимости (кривая 2) больше завышает коэффициент продуктивности скважины по сравнению с выражением для трещины конечной проводимости (кривая 1).

4. Моделирование ГДИС со ступенчатым изменением стадий притока для непроницаемой границы пласта

На рис. 4 и в табл. 3 приведены результаты для случая непроницаемых границ (условие непротекания). В замкнутой системе при отборе пластовой жидкости происходит непрерывное снижение среднего пластового давления. Как следствие, индикаторная диаграмма отклоняется от линейной зависимости (рис. 4), что указывает на нестационарный режим фильтрации. Важно подчеркнуть, что в таких условиях традиционная интерпретация ГДИС методом ИД по методике установившихся режимов становится некорректной — она приводит к систематическим ошибкам при оценке продуктивности скважины и параметров пласта. Аналогичная ситуация может наблюдаться при влиянии окружающих скважин или в зонах с плотной сеткой скважин, где также формируются условия, близкие к замкнутому пласту. Поэтому при планировании исследований в замкнутых пластах или при наличии густой сетки скважин следует использовать специальные методы интерпретации, адаптированные для нестационарных режимов (например, анализ добычи и давления на неустановившихся режимах фильтрации [14], мультискважинную деконволюцию [15, 16]). Наличие нелинейности ИД на рис. 4 может служить признаком отсутствия влияния окружающих нагнетательных скважин [17], нелинейной фильтрации [18, 19] или наличия непроницаемых границ.

5. Заключение

На основе численного моделирования гидродинамических исследований скважин со ступенчатым изменением давления установлено, что в замкнутых системах длительное проведение этапов исследования приводит к нелинейному искажению индикаторной диаграммы. Это связано с непрерывным снижением среднего пластового давления. В таких условиях традиционная интерпретация ИД по методике установившихся режимов становится некорректной.

Показано, что увеличение длительности режимов при непроницаемых границах усиливает отклонение от линейной зависимости, что снижает достоверность оценок продуктивности скважины. Полученные результаты следует учитывать при планировании и интерпретации ГДИС методом ИД в низкопроницаемых коллекторах, а также в зонах с плотной сеткой скважин, наличием нелинейной фильтрации в низкопроницаемых коллекторах и др. В таких случаях целесообразно применять методы

Таблица 3. Результаты интерпретации индикаторных диаграмм (рис. 3) для различных длительностей режимов при условии непротекания на границе пласта

Δt , сут	P_0 , МПа	R^2
5	6.7625	0.9739
10	6.3209	0.9124
20	5.8291	0.8608
30	5.6157	0.8424

интерпретации, адаптированные к нестационарным режимам (например, анализ добычи и давления с учетом границ пласта, мультискважинную деконволюцию).

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов / Author Contributions

Проведение исследования/ Investigation: АЯТ (AYaT); Создание черновика рукописи / Writing – original draft: МРГ (MRG); Создание рукописи и ее редактирование/ Writing – review & editing: МРГ (MRG), АЯД (AYaD), ЗСМ (ZSM); Визуализация/ Visualization: АЯТ (AYaT), МРГ (MRG); Руководство исследованием/ Supervision: АЯД (AYaD); Администрирование проекта/ Project administration: ЗСМ (ZSM);

Список литературы / References

- [1] Карнауков МЛ, Пьянкова ЕМ. *Современные методы гидродинамических исследований скважин. Справочник инженера по исследованию скважин*. Вологда: Инфра-Инженерия. 2010. 432 с. Karnaukhov ML, Pyankova EM. *Modern Methods of Hydrodynamic Well Testing: A Handbook for Well Testing Engineers*. Vologda: Infra-Inzheneriya. 2010. 432 p. (in Russian)
- [2] Эрлагер Р. *Гидродинамические методы исследования скважин*. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 512 с. Erlager R. *Hydrodynamic Well Testing Methods*. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science Research, 2007. 512 p. (in Russian)
- [3] Давлетбаев АЯ, Асалхузина ГФ, Уразов РР, Сарапулова ВВ. *Гидродинамические исследования скважин в низкопроницаемых коллекторах*. Новосибирск: ООО «ДОМ МИРА». 2023. 176 с. Davletbaev A.Ya., Asalkhuzina G.F., Urazov R.R., Sarapulova V.V. *Hydrodynamic Well Testing in Low-Permeability Reservoirs*. Novosibirsk: DOM MIRA LLC. 2023. 176 p.
- [4] Асалхузина ГФ, Бикметова АР, Кардопольцев АС, и др. Эволюция методов и масштабов гидродинамических исследований низкопроницаемых коллекторов. *Нефтяное хозяйство*. 2023;(9):108–111. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2023-9-108-111> Asalkhuzina GF, Bikmetova AR, Kardopol'tsev AS. Evolution of Methods and Scales of Welltesting on Fields with Low Permeability Reservoir. *Oil Industry Journal*. 2023;(9):108–111. (in Russian)
- [5] Асалхузина ГФ, Давлетбаев АЯ, Хабибуллин ИЛ, Ахметова РР. К вопросу выбора длительности режимов при гидродинамических исследованиях скважин на установившихся режимах закачки в низкопроницаемых коллекторах. *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. 2020;6(1):135–149. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2020-6-1-135-149> Asalkhuzina GF, Davletbaev AY, Khabibullin IL, Akhmetova RR. On the selection of suitable operate durations for injection tests in low permeability reservoirs. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*. 2020;6(1):135–149. (in Russian)
- [6] Давлетбаев АЯ. Фильтрация жидкости в пористой среде со скважинами с вертикальной трещиной гидроразрыва пласта. *Инженерно-физический журнал*. 2012;85(5):919–924. <https://elibrary.ru/pbxoqt> Davletbaev AY. Fluid flow in a porous medium with wells containing a vertical hydraulic fracture. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2012;85(5):919–924. (in Russian)
- [7] Сарапулова ВВ, Давлетбаев АЯ, Кунафин АФ, и др. Программный комплекс «РН-ВЕГА» для анализа и интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин. *Нефтяное хозяйство*. 2023;(12):124–129. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2023-12-124-129> Sarapulova VV, Davletbaev AY, Kunafin AF. The RN-VEGA program complex for well test analysis and interpretation. *Oil Industry Journal*. 2023;(12):124–129. (in Russian)
- [8] Cinco-Ley H, Samaniego VF. Transient pressure analysis for fractured wells. *J. Petrol. Technol.* 1981;33(9):1749–1766. <https://doi.org/10.2118/7490-PA>
- [9] Нагаева ЗМ, Шагапов ВШ. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте. *Прикл. математика и механика*. 2017;81(3):319–329. <https://elibrary.ru/yspcjl> Nagaeva ZM, Shagapov VS. Elastic seepage in a fracture located in an oil or gas reservoir. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2017;81(3):214–222. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.08.013>
- [10] Хабибуллин ИЛ, Хисамов АА. К теории билинейного режима фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва. *Вестник Башкир. Университета*. 2018;23(4):958–963. <https://elibrary.ru/yuxnqt> Khabibullin IL, Khisamov AA. On the Theory of Bilinear Flow Regime in the Layers With Hydraulic Fracturing Cracks. *Bulletin of Bashkir University*. 2018;23(4):958–963. (in Russian)
- [11] Хабибуллин ИЛ, Хисамов АА. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва пласта. *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2019;(5):6–14. <https://doi.org/10.1134/S0568528119050050> Khabibullin IL, Khisamov AA. Unsteady Flow through a Porous Stratum with Hydraulic Fracture. *Fluid Dyn.* 2019;54:594–602. <https://doi.org/10.1134/S0015462819050057>
- [12] Prats M. Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior-Incompressible Fluid Case. *SPE J.* 1961;1(02):105–118. <https://doi.org/10.2118/1575-G>
- [13] Economides M, Oligney R, Valko P. *Unified Fracture Design: Bridging the Gap Between Theory and Practice*. Alvin, Texas: Orsa Press. 2001. 262 p.
- [14] Ипатов АИ, Кременецкий МИ. Долговременный мониторинг промысловых параметров, как знаковое направление развития современных ГДИС. *Инженерная практика*. 2012;(9):4–8. <https://elibrary.ru/anrpty> Ipatov AI, Kremenetsky MI. Long-term monitoring of production parameters as a key trend in the development of modern well testing systems. *Engineering Practice*. 2012;(9):4–8. (in Russian)
- [15] Гуляев ДН, Батманова ОВ, Даниленко ОИ. Применение мультискважинной деконволюции для анализа свойств нефтяных пластов. *Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление*. 2019;(3):81–92. <https://doi.org/10.25586/RNU.V9I187.19.03.P081> Gulyaev DN, Batmanova OV, Danilenko OI. Multi-Well Deconvolution Method Implementation for Oil Reservoir Characterization. *Vestnik of the Russian New University. Series "Complex Systems: models, analysis and management"*. 2019;(3):81–92. (in Russian)
- [16] Cumming JA, Wooff DA, Whittle T, Gringarten AC. Multiwell Deconvolution. *SPE Res Eval & Eng.* 2014;17(04):457–465. <https://doi.org/10.2118/166458-PA>
- [17] Асалхузина ГФ, Давлетбаев АЯ, Хабибуллин ИЛ. Моделирование дифференциации пластового давления между нагнетательными и добывающими скважинами на месторождениях с низкопроницаемыми коллекторами. *Вестник Башкирского университета*. 2016;21(3):537–544. <https://elibrary.ru/wyofxl> Asalkhuzina GF, Davletbaev AY, Khabibullin IL. Modeling of the Reservoir Pressure Difference Between Injection and Production Wells in Low Permeable Reservoirs. *Bulletin of Bashkir University*. 2016;21(3):537–544. (in Russian)
- [18] Байков ВА, Галеев РР, Колонских АВ, Якасов АВ, Торопов КВ. Нелинейная фильтрация в низкопроницаемых коллекторах. Влияние на технологические показатели разработки месторождения. *Научно-технический вестник «НК „Роснефть”*. 2013;(2):17–19. <https://elibrary.ru/RWVTIH> Baykov VA, Galeev RR, Kolonskikh AV, Yakasov AV, Toropov KV. Non-linear flow in low-permeability reservoirs: impact on field development performance indicators. *Scientific and Technical Bulletin of Rosneft*. 2013;(2):17–19. (in Russian)
- [19] Кокурина ВВ, Кременецкий МИ, Кричевский ВМ. Контроль эффективности повторного гидроразрыва пласта по результатам гидродинамических исследований. *Каротажник*. 2013;(5(227)):76–99. <https://elibrary.ru/qaalj> Kokurina VM, Kremenetsky MI, Krichevsky VM. Rehydrofrac Effectiveness Control by Hydrodynamical Surveys. *Karotazhnik*. 2013;(5(227)):76–99. (in Russian)

Сведения об авторах / Information about the Authors

Айгиза Ямилевна Тимершаехова
Уфимский университет науки и технологий, Уфа,
Российская Федерация

Aygiza Ya. Timershaehova
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian
Federation
tim.ay17@mail.ru
ORCID: 0009-0002-4647-7608

Марат Радикович Губайдуллин

кандидат физ.-мат. наук
Уфимский университет науки и технологий, Уфа,
Российская Федерация

Marat R. Gubaidullin

Ph.D. (Phys. & Math.)
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian
Federation
fir_bmf@mail.ru
ORCID: 0000-0002-8345-8759

Альфред Ядгарович Давлетбаев

доктор физ.-мат. наук
Уфимский университет науки и технологий, Уфа,
Российская Федерация

Alfred Ya. Davletbaev

Sc.D. (Phys. & Math.)
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian
Federation
DavletbaevAY@rambler.ru
ORCID: 0000-0002-9133-2574

Зульфия Саматовна Мухаметова

Уфимский университет науки и технологий, Уфа,
Российская Федерация

Zulfia S. Muhametova

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian
Federation
MuchametovaZ@mail.ru
ORCID: 0009-0006-0566-248X



Определение объёмного распределения электромагнитного поля по данным диэлектрического нагрева

Б.А. Усманов✉, Р.Р. Галеев, А.А. Мусин, Р.Р. Зиннатуллин

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Российская Федерация

E-mail: bulatusman@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена разработке метода определения объёмного распределения напряжённости электромагнитного поля в цилиндрической камере по данным многоканальной термометрии диэлектрической среды. Актуальность работы обусловлена необходимостью точного описания распределения электромагнитного поля при решении задач диэлектрического нагрева высоковязких нефтей и нефтематеринских пород методами СВЧ-воздействия. Предложенный подход основан на совместном использовании уравнения теплопроводности с распределёнными источниками тепла и выражения для удельной мощности поглощения электромагнитной волны диэлектрической средой, что позволяет решить обратную задачу и восстановить пространственное распределение поля по данным температурного нагрева. Для экспериментальной проверки метода были проведены две серии опытов по нагреву воды СВЧ-полем частотой 2.45 ГГц и мощностью 800 Вт в металлической трубе длиной 40 см при двух конфигурациях источника: боковой и радиально-симметричной. Температура воды в 16-секционной ёмкости измерялась тепловизором, обработка показаний которого осуществлялась методами цифровой обработки изображений. Полученные данные были использованы для восстановления пространственного распределения квадрата напряжённости электрического поля по координатным применением метода Гаусса–Ньютона. Показано, что при боковой конфигурации поле отличается выраженной нерегулярностью за исключением периодической зависимости от угловой координаты, тогда как при радиально-симметричной конфигурации наблюдается более упорядоченное и симметричное распределение с ярко выраженной периодической зависимостью от вертикальной координаты. Предложенный метод позволяет строить трёхмерную картину распределения электромагнитного поля и может быть использован для параметрической идентификации теплофизических моделей диэлектрического нагрева пористых сред.

Ключевые слова: СВЧ-электромагнитное поле; диэлектрический нагрев; 3D печать; цифровая обработка изображений; обратная задача

Финансирование: Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-11-20042.

Цитирование: Усманов БА, Галеев РР, Мусин АА, Зиннатуллин РР. Определение объёмного распределения электромагнитного поля по данным диэлектрического нагрева. *Многофазные системы*. 2026;21(2):65–71.

Determination of volumetric electromagnetic field distribution from dielectric heating data

B.A. Usmanov✉, R.R. Galeev, A.A. Musin, R.R. Zinnatullin

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation

E-mail: bulatusman@mail.ru

Abstract. This work presents a method for determining the volumetric distribution of electromagnetic field strength in a cylindrical chamber using multi-channel thermometry data of a dielectric medium. The relevance of the work is driven by the need for accurate characterization of electromagnetic field distribution in problems of microwave dielectric heating of high-viscosity oils and source rocks. The proposed approach combines the heat conduction equation with distributed heat sources and the formula for specific power absorption of an electromagnetic wave by a dielectric medium, enabling the solution of an inverse problem to reconstruct the spatial field distribution from temperature data. Two series of experiments were carried out: water was heated by a 2.45 GHz microwave field (800 W) in a 40 cm metallic pipe under two source configurations — lateral and radially symmetric. Water temperature in a 16-compartment container was measured with a thermal camera, and the readings were processed using digital image processing methods. The obtained data were used to reconstruct the spatial distribution of the squared electric field strength by coordinate-wise application of the Gauss-Newton method. It was found that the lateral configuration yields a highly irregular field pattern, with the exception of a periodic dependence on the angular coordinate, while the radially symmetric configuration produces a more ordered and symmetric distribution with a pronounced periodic dependence on the vertical coordinate. The proposed method enables three-dimensional mapping of the electromagnetic field and can be applied for parametric identification of thermophysical models of microwave heating in porous media.

Keywords: microwave electromagnetic field; dielectric heating; 3D printing; digital image processing; inverse problem

Funding: The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-20042.

Cite: Usmanov BA, Galeev RR, Musin AA, Zinnatullin RR. Determination of volumetric electromagnetic field distribution from dielectric heating data. *Multiphase Systems*. 2026;21(2):65–71.

1. Введение

В условиях постепенного истощения мировых запасов традиционных углеводородов и перехода к разработке трудноизвлекаемых ресурсов, таких как высоковязкая нефть, природные битумы и нефтематеринские породы (в частности, баженовская свита), разработка новых методов интенсификации добычи приобретает критическое значение [1, 2]. Традиционные тепловые методы, основанные на закачке пара, часто ограничены глубиной залегания пластов, их малой мощностью или низкой приемистостью [3, 4]. В качестве эффективной альтернативы рассматриваются методы электромагнитного (ЭМ) воздействия, которые позволяют доставлять тепловую энергию непосредственно в объем пласта без необходимости использования теплоносителя [5].

Физическая сущность высокочастотного (ВЧ) и сверхвысокочастотного (СВЧ) нагрева заключается в диссипации энергии электромагнитного поля за счёт ориентационной поляризации полярных молекул среды (воды, асфальтенов, смол) [1, 6]. Удельная мощность внутренних источников тепла в этом случае прямо пропорциональна частоте поля и квадрату напряжённости электрического поля [1]. Для нефтематеринских пород такое воздействие способствует не только снижению вязкости флюидов, но и пиролизу керогена с образованием синтетической нефти, а также возникновению температурных напряжений, приводящих к растрескиванию породы и росту её проницаемости [2, 6].

Математическое моделирование процессов ЭМ-нагрева представляет собой сложную сопряжённую задачу электродинамики и теплопереноса [7]. Описание процесса осложняется многофазностью среды, наличием фазовых переходов и зависимостью диэлектрических свойств компонентов от температуры [6, 8]. Существующие модели часто рассматривают среду как квазиоднородную с осреднёнными характеристиками, однако точность таких моделей критически зависит от достоверности задания распределения электромагнитного поля внутри пласта или технологической установки [5, 9].

При использовании СВЧ-излучателей в ограниченных объёмах (трубопроводах или лабораторных ячейках) конструкции фактически выполняют роль волноводов. Обзор экспериментальных работ по электромагнитному нагреву высоковязких нефтей и битумов [10] показывает, что недостаточное понимание пространственного распределения поля остаётся одним из ключевых ограничений для практического применения метода. Характер этого распределения и формирование зон интерференции (стоячих волн) сильно зависят от геометрии системы и расположения источника излуче-

ния [1, 9]. В частности, численный анализ распределения электрического поля в волноводной системе СВЧ-нагрева демонстрирует, что при распространении доминирующей моды вдоль волновода возникают характерные периодические зоны усиленного нагрева, конфигурация которых существенно определяется геометрическими параметрами установки [11]. Таким образом, актуальной задачей являются оперативная визуализация и количественная оценка объёмного распределения поля, что необходимо для идентификации параметров теплофизических моделей и оптимизации режимов нагрева [8, 9].

Для экспериментальной апробации метода в качестве индикаторной среды была выбрана вода — вещество с хорошо изученными диэлектрическими свойствами. Комплексная диэлектрическая проницаемость воды в широком диапазоне частот и температур систематически описана в работе [12] на основе модели Дебая, что обеспечивает надёжную базу для расчёта удельного поглощения ЭМ энергии. Конкретные значения диэлектрических параметров воды на частоте 2.45 ГГц, применяемые в настоящей работе, взяты из [13].

Настоящая работа посвящена развитию метода восстановления объёмной картины распределения напряжённости электромагнитного поля в цилиндрической структуре на основе данных многоканальной термометрии среды, нагреваемой искомым электромагнитным полем.

2. Математическая модель

Для количественного описания теплового воздействия ЭМП на диэлектрическую среду необходима математическая модель, связывающая параметры поля с наблюдаемым температурным откликом. Полная постановка задачи включает сопряжённое решение уравнений Максвелла и нестационарного теплопереноса с учётом многофазности среды, фазовых переходов и зависимости диэлектрических свойств компонентов от температуры [6, 8], что делает прямое численное решение трудоёмким и требует исчерпывающей информации обо всех параметрах системы. В настоящей работе принят упрощённый подход: среда рассматривается как квазиоднородная с осреднёнными диэлектрическими свойствами, что позволяет разделить задачи определения пространственного распределения поля и расчёта теплопереноса. В рамках этого приближения тепловое воздействие ЭМП описывается уравнением теплопроводности с распределёнными источниками тепла:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \Delta T + \frac{q}{c\rho}, \quad (1)$$

где c_p — объёмная теплоемкость; λ — коэффициент теплопроводности; q — плотность распределённых источников тепла.

Для расчёта распределённых источников тепла используется формула, напрямую содержащая в себе параметры искомого электромагнитного поля [14]:

$$q = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon' \operatorname{tg} \delta}{2} |E_0|^2, \tag{2}$$

где E_0 — напряжённость ЭМП; ϵ_0 — электрическая постоянная; ϵ' — диэлектрическая проницаемость; $\operatorname{tg} \delta$ — тангенс угла диэлектрических потерь; ω — циклическая частота поля.

Совмещение формул (1) и (2) позволяет определить распределение ЭМ волны по термометрическим данным среды, находящейся под ЭМ воздействием. Имея данные диэлектрического нагрева среды с известными диэлектрическими свойствами [13], можно решить обратную задачу для определения напряжённости ЭМП в точках измерения температуры. Затем, получив зависимости этих значений от пространственных координат, построить распределение поля во всём исследуемом объёме.

3. Экспериментальная методика

В рамках настоящей работы было проведено 2 серии экспериментов по нагреву воды СВЧ-полем на специально разработанной экспериментальной установке (рис. 1). Поле излучалось магнетроном с частотой 2.45 ГГц (длина волны 12.2 см) и выходной мощностью излучения 800 Вт. Антенна магнетрона помещалась в металлическую трубу длиной 40 см и внутренним диаметром 10 см. Во время работы магнетрона верхняя часть трубы накрывалась защитной металлической решёткой, соответственно, внутри формировалась стоячая волна, сформированная как падающим, так и отражённым излучением. В первой конфигурации установки источник излучения располагался сбоку, а во второй — снизу.

Для учёта неоднородности ЭМП жидкость помещалась в изготовленную методом 3D-печати радиопро-

зрачную ёмкость диаметром 10 см, состоящую из 16 секций с одинаковым объёмом (4 мл). Этот объём достаточно мал для того, чтобы распределение температуры внутри секций можно было считать однородным, соответственно, уравнение (1) можно упростить, исключив слагаемое теплопроводности. ЭМ воздействие длилось 20 с, что позволило пренебречь теплопроводностью между разделёнными перегородками секциями, изменением диэлектрических свойств воды из-за роста температуры и неоднородностью нагрева по высоте, связанной с затуханием волны по мере прохождения через среду. Таким образом, из формул (1) и (2) мы получили следующее выражение для квадрата напряжённости электрического поля:

$$|E_0|^2 = \frac{2c_p \frac{\Delta T}{\Delta t}}{\omega \epsilon_0 \epsilon' \operatorname{tg} \delta} \tag{3}$$

Для получения объёмной картины ЭМ воздействие и замер температуры проводились на разных расстояниях от источника. Фактически мы получали «срезы» распределения ЭМП по длине трубы. При этом до достижения секционной ёмкости волна распространялась по длине трубы свободно. Распределение температуры в секциях ёмкости после ЭМ воздействия измерялось тепловизором. За температуру секции бралась температура в её геометрическом центре. Количественная обработка показаний тепловизора осуществлялась методами цифровой обработки изображений. Исходный снимок конвертировался в оттенки серого, затем полученное монохромное распределение яркостей сопоставлялось с аналогично преобразованной цветовой шкалой тепловизора, присутствующей на том же изображении. Соответствие между значением яркости пикселя, теперь выраженным лишь одним числом, и температурой устанавливалось путём интерполяции по шкале, что позволило перевести распределение интенсивности в распределение температуры.

4. Результаты и обсуждение

Полученные в ходе двух серий экспериментов данные позволили провести сравнительный анализ пространственного распределения ЭМП при боковой и радиально-симметричной конфигурациях установки. На рис. 2 приведены снимки тепловизора для обеих конфигураций установки на расстоянии 18 см от источника излучения. Подробные распределения температуры по угловой координате и по длине трубы при боковой и радиально-симметричной конфигурациях представлены на рис. 3 и рис. 4 соответственно.

Тепловизионные снимки ёмкости непосредственно после ЭМ воздействия (рис. 2) демонстрируют качественные различия в характере нагрева: при боковой конфигурации (рис. 2(а)) наблюдается угловая асимметрия с ярко выраженной периодической зависимостью по угловой координата, тогда как при радиально-симметричной конфигурации (рис. 2(б)) температурное распределение по ней равномерно.

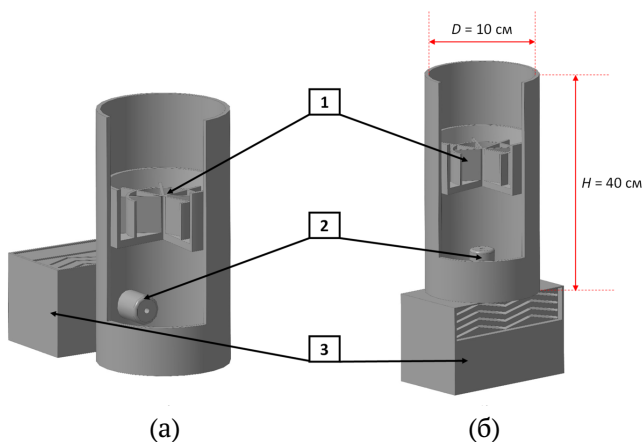


Рис. 1. 3D модель экспериментальной установки в боковой (а) и радиально-симметричной (б) конфигурациях: 1 — секционная ёмкость, 2 — антенна магнетрона, 3 — магнетрон

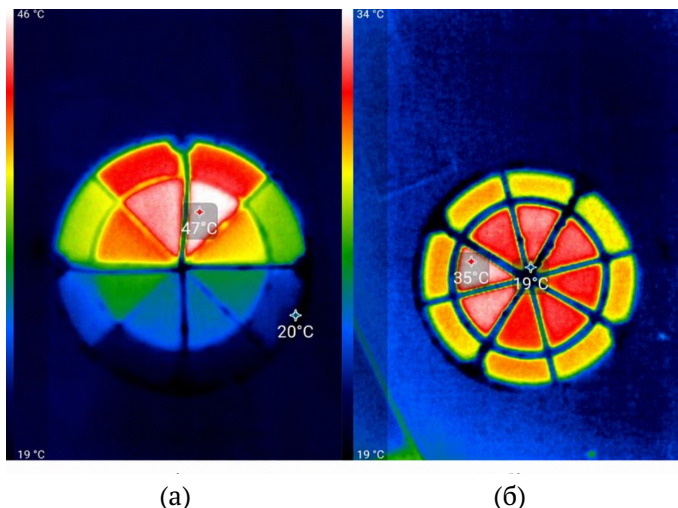


Рис. 2. Показания тепловизора для боковой (а) и радиально-симметричной (б) конфигураций установки на расстоянии 18 см от источника излучения после 20 с ЭМ обработки

Из рис. 4 (в,г) видно, что при радиально-симметричной конфигурации установки поле становится более упорядоченным по мере распространения по длине трубы. На более удалённых участках наблюдается периодическая зависимость от вертикальной координаты, при этом период зависимости почти совпадает с длиной СВЧ-волны (12.2 см). Угловое распределение

остаётся радиально-симметричным (рис.4 (а,б)), различия в температуре в разных секциях на одной и той же высоте остаются в пределах погрешности. При боковой конфигурации наблюдается периодическая зависимость от угловой координаты (рис.3 (а,б)). На рис. 3 (в,г) не наблюдается очевидных закономерностей от вертикальной координаты. Тем не менее, можно заметить, что пики достигаемых температур как для внутренних, так и для внешних секций, во-первых, значительно выше, чем таковые для радиально-симметричной конфигурации, а во-вторых, они оказались на наименьшем расстоянии от антенны магнетрона (1 см), в то время как при радиально-симметричной конфигурации на том же расстоянии нагрева не было вовсе. В случае с радиально-симметричной конфигурацией это может объясняться тем, что волна выходит из антенны преимущественно в магнитной фазе, а в случае с боковой это может объясняться множественным наложением поперечно отражённых волн.

Для визуализации результатов полученные значения изменения температуры после ЭМ воздействия были использованы для расчёта значений напряжённости ЭМП в точках по всему объёму трубы по формуле (3). В цилиндрической системе координат наблюдалась периодическая зависимость по угловой координате при боковой конфигурации и по вертикальной координате при радиально-симметричной. Таким образом, в качестве объёмных функций были выбраны синусоиды от

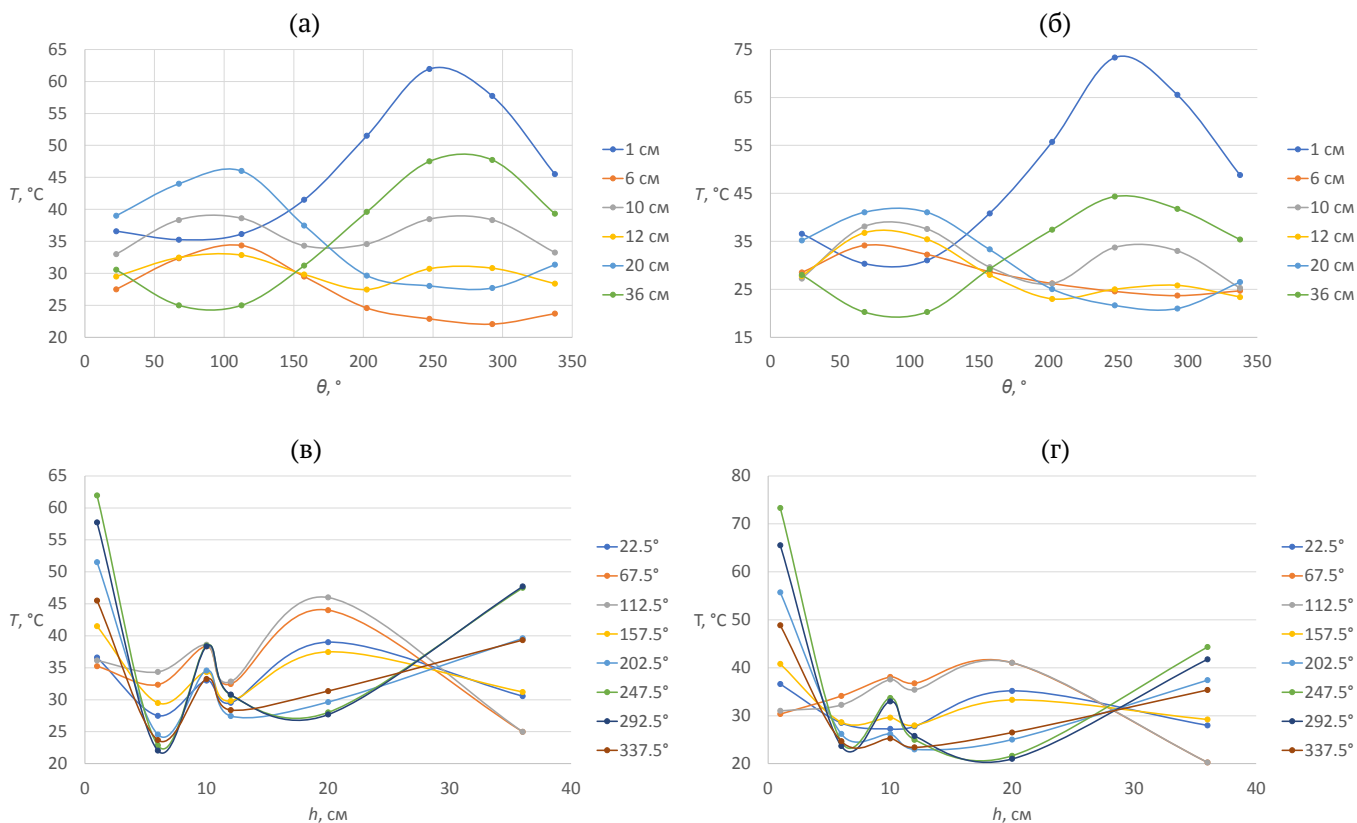


Рис. 3. Распределение температуры по угловой (а, б) и вертикальной (в, г) координатам при боковой конфигурации установки: а, в – внутренние секции, б, г – внешние секции

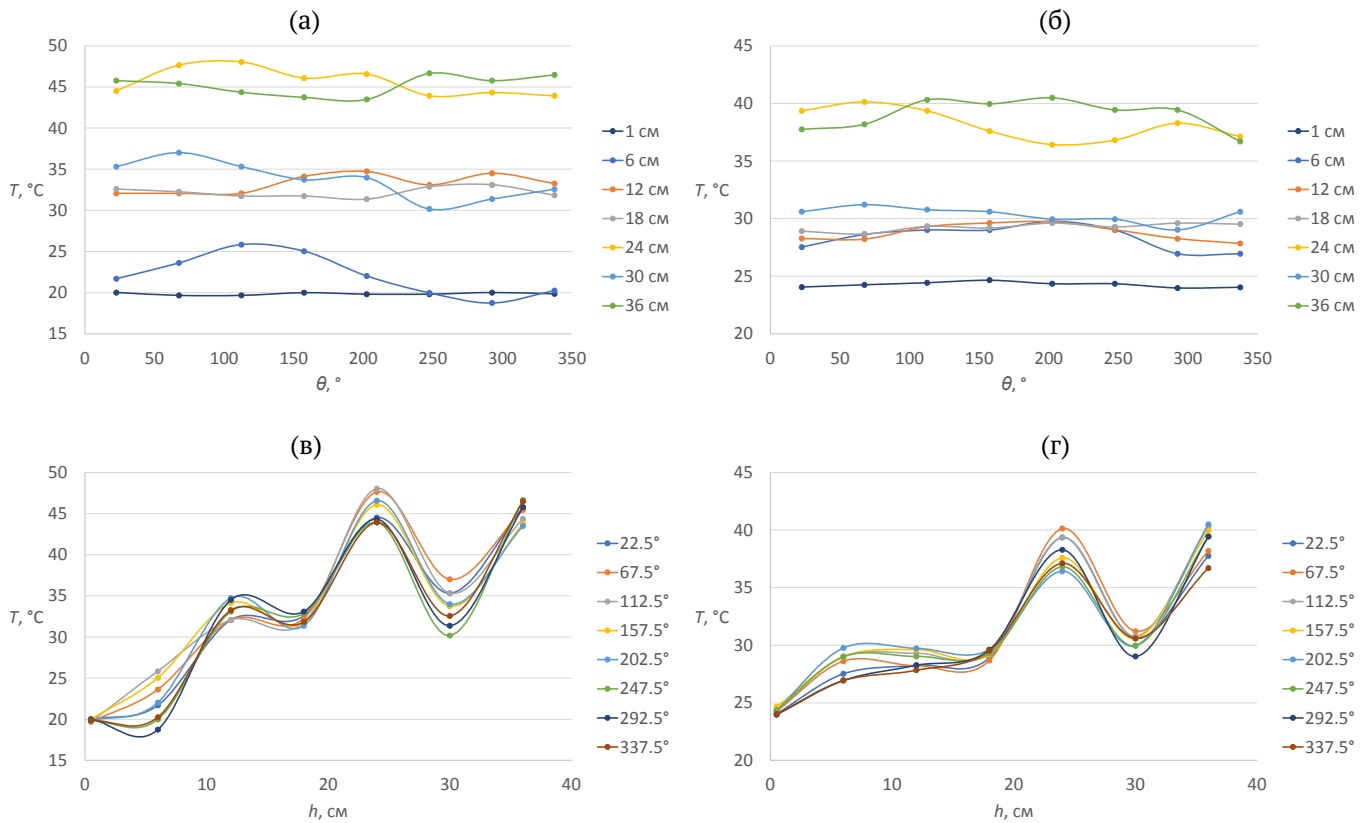


Рис. 4. Распределение температуры по угловой (а, б) и вертикальной (в, г) координатам при радиально-симметричной конфигурации установки: а, в – внутренние секции, б, г – внешние секции

соответствующих координат с коэффициентами, зависящими от остальных координат:

$$|E_0|^2 = a(r, h) \sin(b(r, h) + c(r, h)) + d(r, h), \quad (4)$$

$$|E_0|^2 = a(r, \theta) \sin(b(r, \theta) + c(r, \theta)) + d(r, \theta). \quad (5)$$

При помощи метода Гаусса–Ньютона была проведена последовательная по координатной оптимизация значений этих коэффициентов под экспериментальные данные: при разных θ и h в случае с боковой конфигурацией и при разных r и h при радиально-симметричной. Затем были получены кривые, описывающие зависимость коэффициентов a, b, c и d от координат, не являющихся аргументом синусоиды. На рис. 5 представлено графическое отображение результирующей функции для боковой и радиально-симметричной конфигураций при $h = 24$ см.

5. Заключение

Предложенный в настоящей работе метод позволяет строить объёмную картину распределения квадрата напряжённости ЭМП и может быть использован для параметрической идентификации теплофизических моделей диэлектрического нагрева пористых сред под воздействием СВЧ-излучения с учётом неоднородности поля.

К ограничениям метода следует отнести следующее. Во-первых, точность восстановленного распределения

определяется числом и расположением точек измерения температуры (в данной работе — 16 секций) и возрастает с увеличением пространственного разрешения термометрии. Во-вторых, принятые допущения (квазиоднородность среды, пренебрежение теплопроводностью между секциями и изменением диэлектрических свойств при нагреве) ограничивают применимость метода в режимах длительного или высокоинтенсивного воздействия. В-третьих, синусоидальная форма аппроксимационных функций (4)–(5) обоснована экспериментально наблюдаемой периодичностью и не претендует на общность для произвольных конфигураций источников излучения.

В сравнении с альтернативными подходами к измерению ЭМП, такими как зондирование малыми калиброванными антеннами или магниторезонансная термометрия, предложенный метод не требует размещения чувствительных элементов непосредственно в зоне СВЧ-воздействия и допускает использование стандартного тепловизионного оборудования. Вместе с тем, в отличие от прямых методов, он даёт интегральную оценку поля за время воздействия, а не мгновенное пространственное распределение, что необходимо учитывать при интерпретации результатов.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

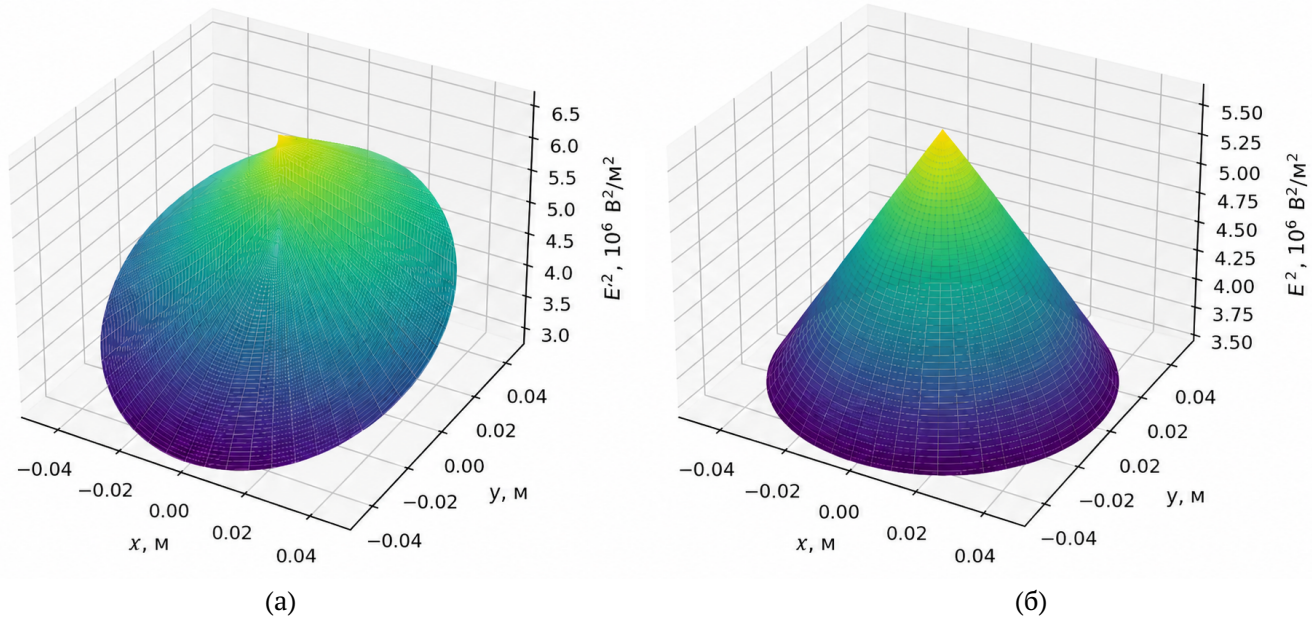


Рис. 5. Распределение квадрата напряжённости электрического поля по площади трубы на расстоянии 24 см от источника излучения при боковой (а) и радиально-симметричной (б) конфигурациях установки

Вклад авторов / Author Contributions

Концептуализация / Conceptualization: ААМ (ААМ), РРЗ (РРЗ) Методология / Methodology: УБА (УБА), РРГ (РРГ), ААМ (ААМ), РРЗ (РРЗ) Программное обеспечение / Software: УБА (УБА) Верификация данных / Validation: РРГ (РРГ), РРЗ (РРЗ) Получение финансирования / Funding acquisition: УБА (УБА), ААМ (ААМ) Проведение исследования / Investigation: УБА (УБА), РРГ (РРГ); Ресурсы / Resources: РРГ (РРГ), РРЗ (РРЗ) Администрирование данных / Data curation: УБА (УБА), ААМ (ААМ) Создание черновика рукописи / Writing – original draft: УБА (УБА) Создание рукописи и ее редактирование / Writing – review & editing: УБА (УБА), ААМ (ААМ) Визуализация / Visualization: УБА (УБА) Руководство исследованием / Supervision: ААМ (ААМ), РРЗ (РРЗ)

Список литературы / References

- [1] Мухаметова ЗС, Мусин АА, Зиннатуллин РР, Ковалева ЛА. Математическое моделирование электромагнитного воздействия на нефтематеринские горные породы с учетом фазовых переходов. *Вестник Башкирского университета*. 2021;26(2):274–280. <https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2021.2.1>
Mukhametova ZS, Musin AA, Zinnatullin RR, Kovaleva LA. Mathematical modeling of electromagnetic effects on source rocks with phase transitions. *Bulletin of Bashkir University*. 2021;26(2):274–280. (in Russian)
- [2] Ковалева ЛА, Зиннатуллин РР, Валеев МД, Миннигалимов РЗ, Фассахов РХ. Лабораторные исследования нагрева высоковязких нефтей в трубопроводах высокочастотным электромагнитным полем. *Нефтяное хозяйство*. 2019;(2):82–85. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2019-2-82-85>
Kovaleva LA, Zinnatullin RR, Valeev MD, Minnigalimov RZ, Fassakhov RKH. Laboratory studies of high-viscosity oil heating in pipelines by high-frequency electromagnetic field. *Oil Industry*. 2019;(2):82–85. (in Russian)
- [3] Sahni A, Kumar M, Knapp RB. Electromagnetic Heating Methods for Heavy Oil Reservoirs. *SPE Western Regional Meeting. Long Beach, California*. 2000:SPE 62550. <https://doi.org/10.2118/62550-MS>
- [4] Bera A, Babadagli T. Status of electromagnetic heating for enhanced heavy oil/bitumen recovery and future prospects: A review. *Applied Energy*. 2015;151:206–226. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2015.04.031>
- [5] Ерофеев АА, Митрушкин ДА, Меретин АС, et al. Моделирование термических методов разработки залежей баженовской свиты. *Российская нефтегазовая техническая конференция SPE. Москва*. 2016:SPE-182131-RU.
Erofeev AA, Mitrushkin DA, Meretin AS, et al. Simulation of Thermal Recovery Methods for Development of the Bazhenov Formation (Russian). *SPE Russian Petroleum Technology Conference and Exhibition. Moscow*. 2016:SPE-182131-RU. (in Russian)
- [6] Князева АГ, Маслов АЛ. Численное исследование влияния пористости на термическое разложение горючих сланцев при их подземном нагреве электромагнитным полем. *Химическая физика и мезоскопия*. 2016;18(2):206–214. <https://elibrary.ru/wgqgrv>
- [7] Князева АГ, Маслов АЛ. Идентификация параметров модели термического разложения горючих сланцев. *Химическая физика и мезоскопия*. 2017;19(3):371–378. <https://elibrary.ru/zrwqmh>
Knyazeva AG, Maslov AL. Parameter identification of a thermal decomposition model for oil shales. *Chemical Physics and Mesoscopy*. 2017;19(3):371–378. (in Russian)
- [8] Martemyanov SM, Maslova AL. Two-Temperature Two-Dimensional Model of Underground Shale Heating by Electromagnetic Field. *Advanced Materials Research*. 2014;1040:620–624. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1040.620>
- [9] Давлетбаев АЯ, Ковалева ЛА, Насыров НМ. Исследование процессов теплопереноса в многослойной среде при нагнетании смешивающегося агента с одновременным электромагнитным воздействием. *Теплофизика высоких температур*. 2009;47(4):605–610. <https://elibrary.ru/kueqof>
Davletbaev AY, Kovaleva LA, Nasyrov NM. An Investigation of the Processes of Heat and Mass Transfer in a Multilayer Medium under Conditions of Injection of a Miscible Agent with Simultaneous Electromagnetic Stimulation. *High Temperature*. 2009;47(4):574–579. <https://doi.org/10.1134/S0018151X09040166>
- [10] Mukhametshina A, Maximov M. Electromagnetic Heating of Heavy Oil and Bitumen: A Review of Experimental Studies and Field Applications. *Journal of Petroleum Engineering*. 2013:476519. <https://doi.org/10.1155/2013/476519>
- [11] Luan D, Tang J, Pedrow PD, Liu F, Tang Z. Analysis of electric field distribution within a microwave assisted thermal sterilization (MATS) system by computer simulation. *Journal of Food Engineering*. 2016;188:87–97. <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2016.05.009>
- [12] Kaatz U. Complex permittivity of water as a function of frequency and temperature. *Journal of Chemical and Engineering Data*. 1989;34(4):371–374. <https://doi.org/10.1021/je00058a001>
- [13] Gezahegn YA, Tang J, Sablani SS, et al. Dielectric properties of water relevant to microwave assisted thermal pasteurization and sterilization of packaged foods. *Innovative Food Science & Emerging Technologies*. 2021;74:102837. <https://doi.org/10.1016/j.ifset.2021.102837>
- [14] Насыров НМ, Низаева ИГ, Саяхов ФЛ. Математическое моделирование явлений теплопереноса в газогидратных залежах в высокочастотном электромагнитном поле. *Прикладная механика и техническая физика*. 1997;38(6):93–104. <https://elibrary.ru/vbzofn>
Nasyrov NM, Nizaeva IG, Sayakhov FL. Mathematical modeling of heat and mass transfer phenomena in gas hydrate deposits in a high-frequency electromagnetic field. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 1997;38(6):93–104. (in Russian)

Сведения об авторах / Information about the Authors**Булат Альбертович Усманов**

Уфимский университет науки и технологий, Уфа,
Российская Федерация

Bulat A. Usmanov

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian
Federation

bulatusman@mail.ru

ORCID: [0009-0001-0040-9266](https://orcid.org/0009-0001-0040-9266)

Рушан Ринатович Галеев

Уфимский университет науки и технологий, Уфа,
Российская Федерация

Rushan R. Galeev

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian
Federation

galeevr93@gmail.com

ORCID: [0009-0006-4558-8583](https://orcid.org/0009-0006-4558-8583)

Айрат Ахматович Мусин

кандидат физ.-мат наук, доцент
Уфимский университет науки и технологий, Уфа,
Российская Федерация

Airat A. Musin

Ph.D. (Phys. & Math.), Assist. Prof.

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian
Federation

mus-airat@yandex.ru

ORCID: [0009-0007-2353-0062](https://orcid.org/0009-0007-2353-0062)

Расул Рашитович Зиннатуллин

кандидат техн. наук, доцент
Уфимский университет науки и технологий, Уфа,
Российская Федерация

Rasul R. Zinnatullin

Ph.D. (Engineering), Assist. Prof.

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian
Federation

rasulz@yandex.ru

ORCID: [0009-0004-4782-9921](https://orcid.org/0009-0004-4782-9921)



Численное решение начально-граничной задачи о повторном воздействии ударного импульса на пузырьковую жидкость

А.С. Родионов✉, Э.Р. Закирова

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уфимский государственный нефтяной технический университет», Уфа, Российская Федерация

E-mail: artrodionov@mail.ru

Аннотация. Начально-граничная задача об эволюции волнового импульса в ударной трубе, инициированного распадом разрыва, решена численно на основе метода контрольного объема. Так как опыты по изучению ударно-волновых импульсов проводят на установках, представляющих из себя ударные трубы, то расчетная область выбрана соответствующей подобным установкам. Моделируется процесс распада разрыва, когда из-за разницы давлений в камерах высокого и низкого давления происходит разрушение диафрагмы и формируется ударно-волновой импульс. В модели также присутствует область, соответствующая секции газожидкостной среды, где в рассматриваемом случае находится жидкость, насыщенная пузырьками. Камера низкого давления и секция газожидкостной среды оснащены датчиками давления. Сделана постановка задачи, включающая уравнение сохранения масс, импульсов и энергии. Постановка задачи записана для газовой фазы и пузырьковой жидкости. Построены эпюры для изучения пространственного распределения давления в описанной области. Рассчитаны данные, получаемые датчиками и построены осциллограммы давления. Рассмотрено изменение радиуса пузырьков от времени, выявлена связь между изменением радиуса пузырьков и резкими скачками давления в пузырьковой жидкости. Рассматривается случай повторного отражения ударно-волнового импульса от пузырьковой жидкости и увеличение его амплитуды в газожидкостной смеси. Выявлено увеличение амплитуды при повторном прохождении ударно-волнового импульса через пузырьковую жидкость. С помощью дискретного преобразования Фурье получен спектр импульса в пузырьковой жидкости. Проведено сравнение частотного спектра при первом и втором прохождении волны в пузырьковой жидкости. Выявлены частоты, которые вносят больший вклад в частотный спектр.

Ключевые слова: граничная задача; система уравнений в частных производных; ударная труба; распад разрыва; пузырьковая жидкость; численный метод; численные расчеты

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 24-11-00274, <https://rscf.ru/project/24-11-00274>

Цитирование: Родионов АС, Закирова ЭР. Численное решение начально-граничной задачи о повторном воздействии ударного импульса на пузырьковую жидкость. *Многофазные системы*. 2026;21(2):72–80.

Numerical solution of the initial boundary value problem of the repeated impact of a shock pulse on a bubbly liquid

A.S. Rodionov✉, E.R. Zakirova

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Ufa State Petroleum Technological University”, Ufa, Russian Federation

E-mail: artrodionov@mail.ru

Abstract. The initial-boundary value problem of the evolution of a wave pulse in a shock tube initiated by discontinuity decay is solved numerically using the control volume method. Since experiments studying shock-wave pulses are conducted in shock tube setups, the computational domain is chosen to correspond to similar setups. The discontinuity decay process is modeled, where the pressure difference in the high- and low-pressure chambers causes the diaphragm to rupture and a shock-wave pulse to form. The model also includes a domain corresponding to the gas-liquid section, which in this case contains a bubble-saturated liquid. The low-pressure chamber and the gas-liquid section are equipped with pressure sensors. A problem formulation is developed, including the conservation equations for mass, momentum, and energy. The problem formulation is written for the gas phase and the bubbly liquid. Pressure diagrams are constructed to study the spatial pressure distribution in the described domain. The data obtained by the sensors are calculated, and pressure oscillograms are plotted. The change in bubble radius over time is examined, and a relationship between this change and sudden pressure surges in a bubbly liquid is identified. A case of repeated reflection of a shock wave pulse from a bubbly liquid and an increase in its amplitude in a gas-liquid mixture is considered. An increase in amplitude is observed upon repeated passage of the shock wave pulse through the bubbly

liquid. Using a discrete Fourier transform, the pulse spectrum in the bubbly liquid is obtained. The frequency spectrum for the first and second passages of the wave in the bubbly liquid is compared. Frequencies that contribute most to the frequency spectrum are identified.

Keywords: boundary value problem; system of partial differential equations; shock tube; fracture decay; bubbly fluid; numerical method; numerical calculations

Funding: The research was carried out at the expense of a grant from the Russian Science Foundation no. 24-11-00274, <https://rscf.ru/project/24-11-00274/>

Cite: Rodionov AS, Zakirova ER. Numerical solution of the initial boundary value problem of the repeated impact of a shock pulse on a bubbly liquid. *Multiphase Systems*. 2026;21(2):72–80.

1. Введение

Интерес к изучению распространения волн в насыщенной пузырьками жидкостью связан с применением результатов исследований в области сейсмологии [1], при конструкции защитных сооружений, например, при проектировании пузырьковых завес, и использовании гидроразрыва пласта [2, 3]. Постановка подобных задач приводит к необходимости решения начально-граничных задач, состоящих из системы уравнений в частных производных.

Скорость ударной волны при распространении в пузырьковой жидкости определяется начальным газосодержанием, уменьшается при повышении газовой фазы пузырьковой среды [4] и давлением падающей волны (увеличивается с повышением амплитуды давления) [4]. Также на скорость оказывает влияние размер пузырьков, полидисперсность влияет на профиль волны.

Структура волны при этом может быть как монотонной, в случае малых газосодержаний и слабых волн, так и осцилляторной (пульсационной) — при высоких давлениях и концентрациях газа [4, 5].

Наличие химических реакций может приводить к усилению волны или детонации. Детонация возникает в случае пузырьковых сред с химически активной газовой фазой. Например, в [6] показана возможность интенсификации процесса образования гидратов за счет увеличения дробления пузырьков из-за роста амплитуды волны, обусловленного геометрией канала.

При образовании в жидкости сферического пузырькового кластера, который может быть возбужден ударной волной, данный кластер может выступать в качестве активной среды. Такая среда способна поглощать внешнее возмущение, усиливать его и переизлучать в виде мощного акустического импульса [7].

В [8] на основе системы уравнений двухфазного сжимаемого вязкого течения проведено двумерное численное моделирование проникновения ударной волны в воду с пузырьками воздуха и её последующего распространения в пузырьковой жидкости. Показано хорошее согласование с экспериментом при 2–3% содержании воздушных пузырьков, однако авторы отмечают, что при меньшей доле пузырьков наблюдаются заметные расхождения.

В работе [9] исследовано распространение слабо нелинейных волн давления в пузырьковой жидкости, в ходе чего было выведено уравнение Кортвега–де Вриза–Бюргерса (KdVB) учитывающее нелинейность,

диссипацию и дисперсию волн. В отличие от предыдущих исследований, данное уравнение учитывает взаимодействие пузырьков между собой.

В [10] представлено исследование распространения акустических волн в жидкостной среде, содержащей воздушные пузырьки, с применением численного моделирования в программном комплексе COMSOL Multiphysics. Проводится анализ воздействия газовых включений на акустические характеристики среды, включая дисперсионные свойства, процессы поглощения и нелинейные эффекты. Показано, что при уменьшении частоты звуковых волн влияние пузырьков на распространение волны минимально и ограничивается локальными возмущениями, а при увеличении частоты наблюдается значительное рассеяние акустической энергии, формирование сложной интерференционной структуры и локальное усиление акустического давления.

Разработаны математические модели [11] для описания распространения ударных волн в гетерогенных средах с пузырьками и динамики высокоскоростных потоков вскипающей жидкости при разгерметизации сосудов высокого давления. В исследовании термодинамических характеристик среды использовано уравнение состояния воды и пара на основе экспериментальных данных по сжимаемости.

Ударные волны могут распространяться в пористых средах, насыщенных пузырьковой жидкостью, например, в [12] численно решена начальная краевая задача о воздействии ударного импульса, падающего из газа в порошкообразную среду, насыщенную газожидкостной смесью. Установлено, что в порошкообразной среде, заполненной газожидкостной смесью, основной вклад в общее напряжение вносит давление поровой газожидкостной смеси.

Теоретическая модель, развитая в рамках континуального подхода и позволяющая описывать динамику акустических волн в полидисперсной вязкоупругой пузырьковой среде с учётом межфазного теплообмена, представлена в [13]. Показано, что учёт упругости несущей фазы приводит к сдвигу пиковых значений кривых фазовой скорости и коэффициента затухания в сторону более высоких частот по сравнению с моделью, не учитывающей упругость.

Авторами [14] предложен новый подход, позволяющий координировать изменение давления в жидкости с колебаниями пузырька и использовать нелинейный

резонанс при неперриодическом воздействии внешнего поля давления умеренной амплитуды. В ходе проведения численного анализа показано, что с уменьшением радиуса пузырьков отклик пузырьковой смеси в режиме резонансного возбуждения усиливается. Таким образом, метод позволяет достигать экстремально высоких давлений и температур газа в пузырьках, что качественно подтверждается профилями давления, температуры и радиуса пузырьков.

Подобные задачи часто решаются с применением различных численных методов. При описании распространения ударных волн или волн сжатия в пузырьковой жидкости при одномерном приближении [15] применяется метод Годунова, являющийся вариантом метода контрольного объема. Для многомерных задач — методы конечных объемов или прямое численное моделирование [16]. Прямое численное моделирование применяется для детального изучения межфазных взаимодействий.

В данной работе численно исследуется эволюция волнового импульса в ударной трубе и в слое пузырьковой жидкости.

2. Постановка начально-граничной задачи

Опыты по изучению динамики УВИ проводят в установке «Ударная труба» [17], поэтому задачу о повторном отражении импульса от слоя пузырьковой жидкости будем изучать для схемы ударной трубы приведенной на рис. 1. Ударная труба включает камеру высокого давления (КВД) в области $0 \leq x \leq L_h$, камеру низкого давления (КНД) для $L_h < x \leq L_s$ и секцию газожидкостной среды (СГС) — $L_s < x \leq L_w$. В начальный момент вре-

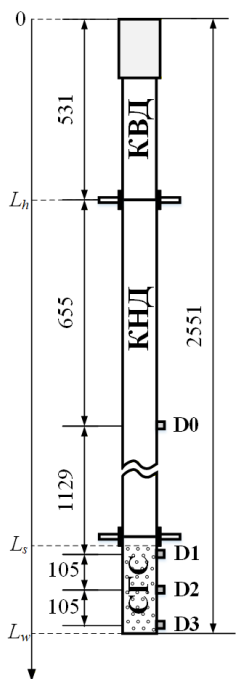


Рис. 1. Ударная труба, оснащенная секцией газожидкостной среды и датчиками давления D0–D3

мени $t=0$ в КВД ударной трубы имеется сжатый газ (воздух); КНД заполнена невозмущенным атмосферным газом и слоем жидкости, насыщенной пузырьками, находящейся в секции газожидкостной среды СГС. В КНД и СГС находятся датчики, регистрирующие давление газа (D0 — 1186 мм) и жидкости (D1 — 2315 мм, D2 — 2420 мм, D3 — 2525 мм). В момент времени $t = 0$ диафрагма между КВД и КНД «разрушается», в КНД устремляется поток воздуха образуя ударно-волновой импульс (УВИ). Требуется изучить динамику отражения и прохождения УВИ в трубе, содержащей слой пузырьковой жидкости в СГС.

Описанная выше проблема сводится к начально-граничной задаче, приведенной ниже. Постановка задачи включает общепринятые допущения, используемые при описании газовой фазы и пузырьковых жидкостей [12, 18].

В области $0 \leq x \leq L_h$, соответствующей газовой фазе, приняты следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho_g^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g^0 v_g}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_g^0 v_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g^0 v_g^2}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_g^0 u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g^0 u_g v_g}{\partial x} + p \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Здесь p_g — давление в газе; v_g — скорость газа; u_g — удельная внутренняя энергия.

Так как газ считается калорически совершенным, то использованы следующие уравнения состояния и энергии:

$$p = \rho_g^0 R T_g, \quad u_g = c_{vg} T_g, \quad (4)$$

где c_{vg} — теплоемкость при постоянном объеме газа; R — газовая постоянная.

Уравнения, описывающие динамику волны в пузырьковой жидкости $L_s < x \leq L_w$, имеют вид:

$$\frac{\partial \rho_{l+g}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{l+g} v_l}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n_b}{\partial t} + \frac{\partial n_b v_l}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_{l+g} v_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{l+g} v_l^2}{\partial x} + \alpha_g \frac{\partial p_l}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

В (5) и (6) приняты обозначения, аналогичные газовой фазе, индекс $l+g$ указывает, что величина взята для пузырьковой жидкости; α_g — объемное содержание газа; n_b — концентрация пузырьков в жидкости.

Вспользуемся уравнением Рэлея–Ламба для определения составляющей w_R радиальной скорости $w = w_R + w_A$

$$\rho_{l0}^0 \left(a w_R + \frac{3}{2} w_R^2 \right) = p_g - p_l - \frac{2\Sigma}{a} - 4\mu_l \frac{w_R}{a}, \quad (7)$$

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_{l0}^0 C_l x_{g0}^{1/3}}. \quad (8)$$

Уравнение состояния для жидкости показано ниже:

$$p_l = p_0 + C_l^2(\rho_l^0 - \rho_{l0}^0),$$

$$\frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g w}{a} - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q. \tag{9}$$

Здесь $q = \lambda_g \text{Nu} (T_g - T_0) / 2a$ определяет интенсивность межфазного теплообмена; C_l — скорость звука в «чистой» жидкости; x_{g0} — доля газа в пузырьковой жидкости; ρ_g^0 — истинная плотность газа; ρ_l^0 — истинная плотность жидкости; μ_l — динамическая вязкость жидкости; a — радиус пузырьков.

Число Нуссельта рассчитано по формуле

$$\text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100 \\ 10, & \text{Pe} < 100 \end{cases}$$

где число Пекле

$$\text{Pe} = \frac{12(\gamma - 1)T_0 a |w|}{|T_g - T_0| \kappa_g};$$

κ_g — коэффициент температуропроводности; T_g — температура.

Итак, начально-граничную задачу можно сформулировать следующим образом: в начальный момент времени $t = 0$ в области $0 \leq x \leq L_h$ имеется сжатый газ (воздух); пространство $L_h < x \leq L_s$ последовательно заполнено невозмущенным атмосферным газом, а $L_s < x \leq L_w$ — пузырьковой жидкостью. Требуется изучить динамику отражения и прохождения ударных импульсов, образующихся в ударной трубе, при взаимодействии со слоем пузырьковой жидкости при $t > 0$, т.е. найти функции p_g, ρ_g, v_g, T_g , удовлетворяющие системе уравнений (1)–(9) и начальным условиям.

Начальные и граничные условия сформулированной задачи, схематично изображенной на рис. 1, имеют следующий вид:

$$p_g = p_{g1}, \quad \rho_g^0 = \rho_{g1}^0, \quad T_g = T_0, \\ v_g = 0, \quad \alpha_g = 1, \quad (0 \leq x \leq L_h);$$

$$p_g = p_0, \quad \rho_g^0 = \rho_{g0}^0, \quad T_g = T_0, \\ v_g = 0, \quad \alpha_g = 1, \quad (L_h < x \leq L_s); \tag{10}$$

$$p_g = p_0, \quad \rho_g^0 = \rho_{g0}^0, \quad T_g = T_0, \quad \alpha_g = \alpha_{g0}, \\ \rho_i = \alpha_i \rho_i^0, \quad \rho_{g1} = \rho_l + \rho_g, \quad i = (l, g), \\ \alpha_{g0} = \frac{4}{3} \pi a^3 n_b, \quad \alpha_l + \alpha_g = 1, \quad (L_s < x \leq L_w).$$

Нижними индексами 0 отмечены невозмущенные параметры системы, на торцах трубы задаются в виде условия непротекания

$$v_g = 0, \quad v_l = 0, \quad v_s = 0 \quad (x = 0, x = L_w). \tag{11}$$

Задача (1)–(11) решается численно, с помощью метода контрольного объема [19]. Расчеты выполнены при следующих значениях термодинамических параметров газовой и дисперсной фаз: $p_0 = 0.101$ МПа,

$T_0 = 290$ К, $\rho_{g0}^0 = 1.19$ кг/м³, $\gamma = 1.4$, $c_{vg} = 720$ м²/(с²·К), $\mu_g = 1.81$ кг/(м·с), $a = 1$ мм, $\rho_{l0}^0 = 1000$ кг/м³, $C_l = 1500$ м/с, $\rho_{g0}^0 = 1.29$ кг/м³, $\lambda_g = 0.0258$ Вт/(м·К), $c_g = 716$ Дж/(кг·°С), $\Delta x = 1$ мм, $\Delta t = 0.1$ мкс.

В работе использовано преобразование Фурье основанное на представлении сигнала в виде суммы гармонических колебаний с разными частотами, амплитудами и фазами, что позволяет провести исследование вклада разных частот в общий сигнал. Поэтому по результатам расчетов сделан анализ частотного спектра, полученного с помощью дискретного преобразования Фурье

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n k e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}.$$

Здесь X_k — спектр сигнала; x_n — значения сигнала, полученного по результатам моделирования, в дискретных временных точках n ; k — номер частотного компонента; N — количество компонент разложения.

3. Численные расчеты

Расчетные профили давления при отражении для первого прохождения УВИ через жидкость, насыщенную пузырьками, представлены на рис. 2. УВИ, образованный в результате распада разрыва, обладает амплитудой 15 кПа к моменту времени $t = 0.4$ мс. При этом, в области КНД распространяется ударная волна, а в КВД — волна разрежения. Скорость ударной волны составляет примерно 360 м/с. Отражение от пузырьковой жидкости приводит к увеличению амплитуды отраженной волны из-за разницы акустических сопротивлений в два раза до 30 кПа ($t = 4.9$ мс). В область пузырьковой жидкости ($L_s < x \leq L_w$) УВИ проходит с увеличенной амплитудой, происходит растяжение переднего фронта ($t = 5.3$ мс), на профиле волны появляются колебания ($t = 6.7$ мс), обусловленные радиальной инерцией пузырьковой жидкости [9].

Профили давления при переотражении (второе прохождение УВИ через пузырьковую жидкость) представлены на рис. 3. УВИ, отраженный от верхнего торца трубы, движется в направлении пузырьковой жидкости со скоростью также около 365 м/с. Как видно из анализа эпюры в момент времени $t = 0.4$ мс, при отражении от пузырьковой жидкости происходит аномальное увеличение амплитуды до 60 кПа. Дальнейшее прохождение УВИ через слой пузырьковой жидкости приводит к появлению колебаний и увеличению амплитуды до 80 кПа в момент времени $t = 0.4$ мс. Это указывает на наложение падающей волны и волны, многократно отражающейся в области $L_s < x \leq L_w$. Также может оказывать влияние изменения параметров пузырьковой жидкости по сравнению с первым прохождением УВИ, например, изменение диаметра пузырьков.

Для анализа распределения давления УВИ по времени, рассмотрим осциллограммы для датчиков D0–D3 (рис. 4), датчик D0 показывает давление в газе, а датчики D1–D3 — в пузырьковой жидкости. Эпюра 1 соответствует падающему импульсу, 1r — отраженному от

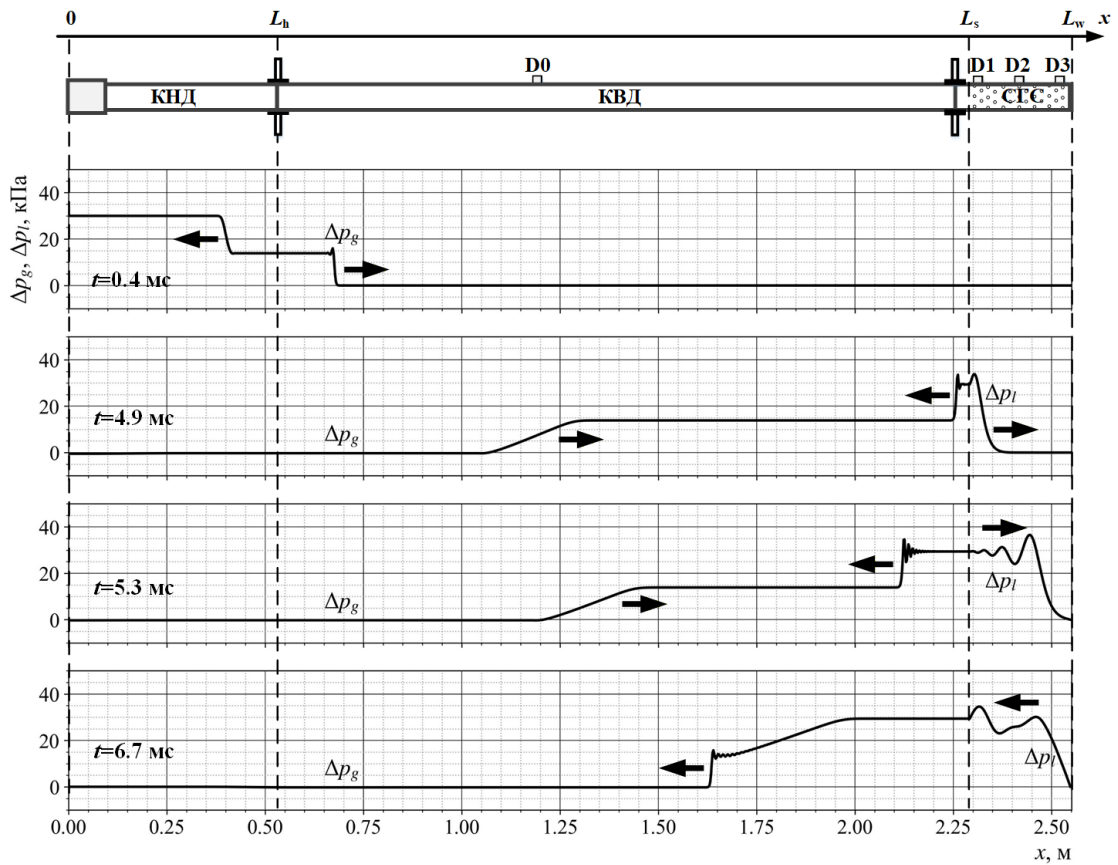


Рис. 2. Схема ударной трубы и эпюры ударно-волнового импульса при первом прохождении через пузырьковую жидкость в разные моменты времени

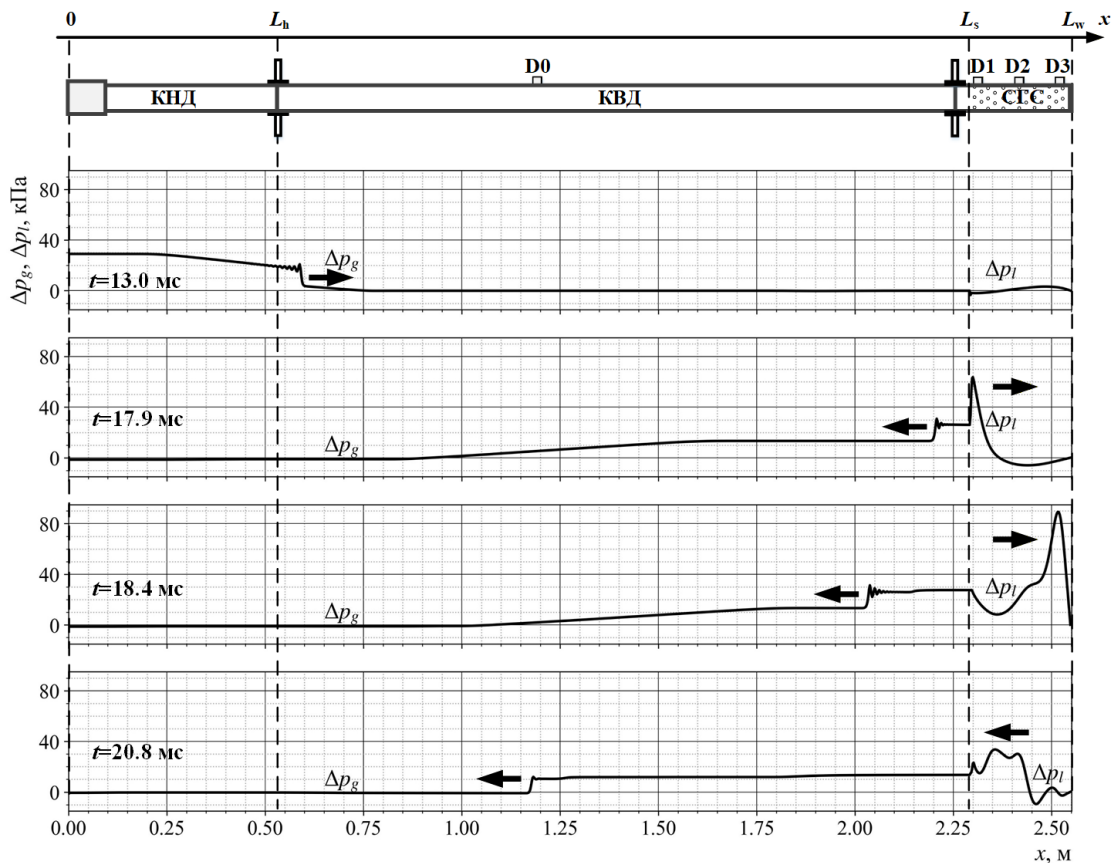


Рис. 3. То же что и на рис. 2, но для переотраженного импульса

пузырьковой жидкости импульсу. Амплитуда импульса около 15 кПа, протяженность около 3 мс, передний фронт импульса имеет крутую форму, задний — пологую. Также из осциллограммы для газа видно, что последующие отраженные и переотраженные импульсы не отличаются от падающего (эпюра 1). Прохождение УВИ в пузырьковую жидкость сопровождается двукратным увеличением амплитуды (до 30 кПа, см. датчик D1), что было показано и на рис. 2.

Из показаний датчиков D1–D3 следует, что амплитуда импульса, прошедшего в пузырьковую жидкость уменьшается с 30 (1a) до 25 кПа (1c). Дошедший до нижнего торца трубы импульс отражается и циркулирует в области $L_s \leq x \leq L_w$, также происходит его наложение с «давящим» на жидкость падающим импульсом. Циркулирующий в $L_s \leq x \leq L_w$ импульс остается и когда падающий импульс полностью отразится от жидкости и будет двигаться в обратном направлении, об этом свидетельствует наличие колебаний между 1b и 2b.

Повторное прохождение УВИ через пузырьковую жидкость приводит, как уже было упомянуто, к аномальному увеличению амплитуды. На участке осциллограммы 2b для датчика D2 видно, что максимальный скачок амплитуды равен примерно 105 кПа, что превышает исходный падающий импульс (1 для D0) в 7 раз. Отметим, что эти скачки амплитуды очень кратковременные, протяженность подобных пиков не больше 0.5 мс.

На рис. 5 показаны осциллограммы давления и радиуса пузырьков для датчиков, расположенных в жидкости (D1–D3). Сравнивая осциллограммы для давления и радиусов пузырьков, можно сделать вывод, что моменты появления пиков связаны со сжатием пузырьков (соответственно и с уменьшением газосодержания в эти моменты). Следовательно, увеличение амплитуды может быть объяснено изменением затухания волны из-за меньшего объема пузырьков, с последующим наложением на импульс, переотражающийся в СГС.

Рассмотрим сравнение частотного спектра сигнала при первом и втором прохождении УВИ каждого датчика (рис. 6). Для датчика D0 выбраны импульсы 1 протяженностью которого задана временем $0 \leq t < 6.2$ мс и $1r - 6.2 \leq t < 12.4$ мс (рис. 4). На датчиках D1–D3 в качестве первого прохождения взяты импульсы 1a, 1b, 1c протяженностью $0 \leq t < 12.5$ мс, в качестве второго 2a, 2b, 2c для времен $12.5 \leq t < 25.0$ мс.

Как уже было сказано, осциллограммы для падающего и отраженных импульсов практически не меняются, поэтому их спектры тоже почти полностью идентичны (диаграмма для D0 на рис. 5). В спектре сигнала на D0 основной вклад вносит частота 150 Гц, также значительную мощность имеет частота 485 Гц.

По частотным спектрам сигнала на D1 можно сделать вывод, что при втором прохождении происходит заметное смещение частот спектра в область средних

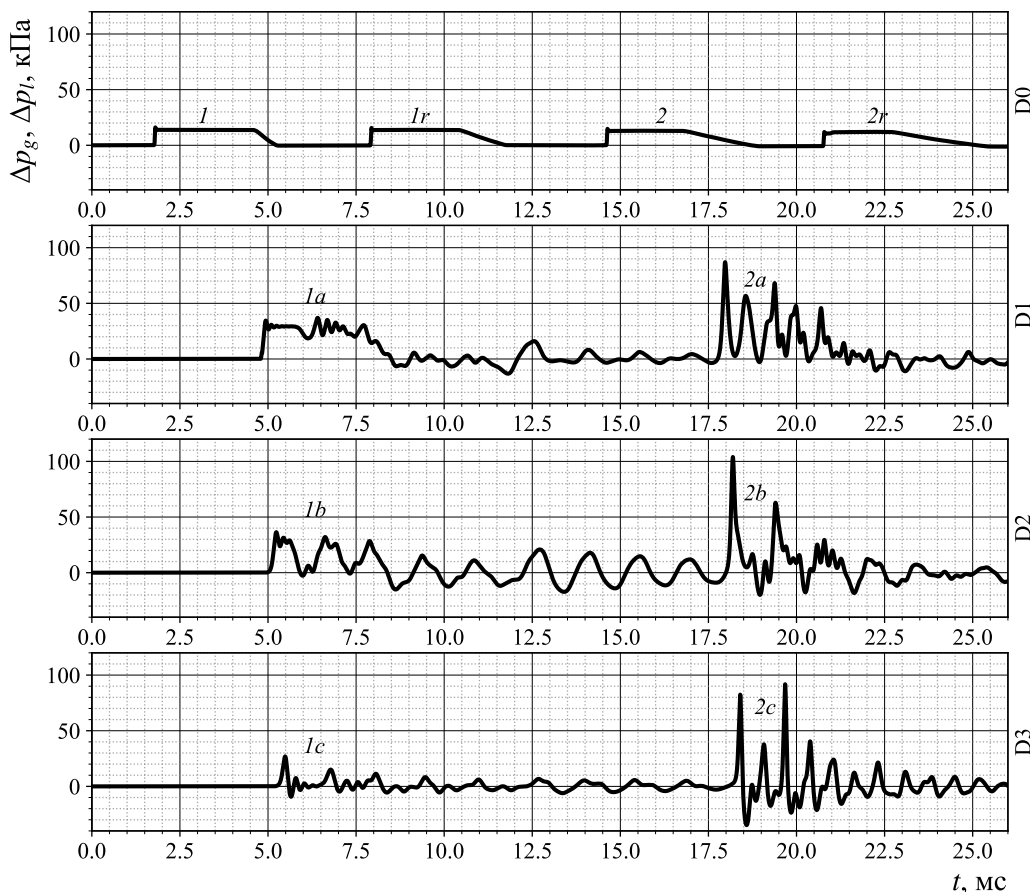


Рис. 4. Осциллограммы давления для датчиков D0–D3, параметры как на рис. 1

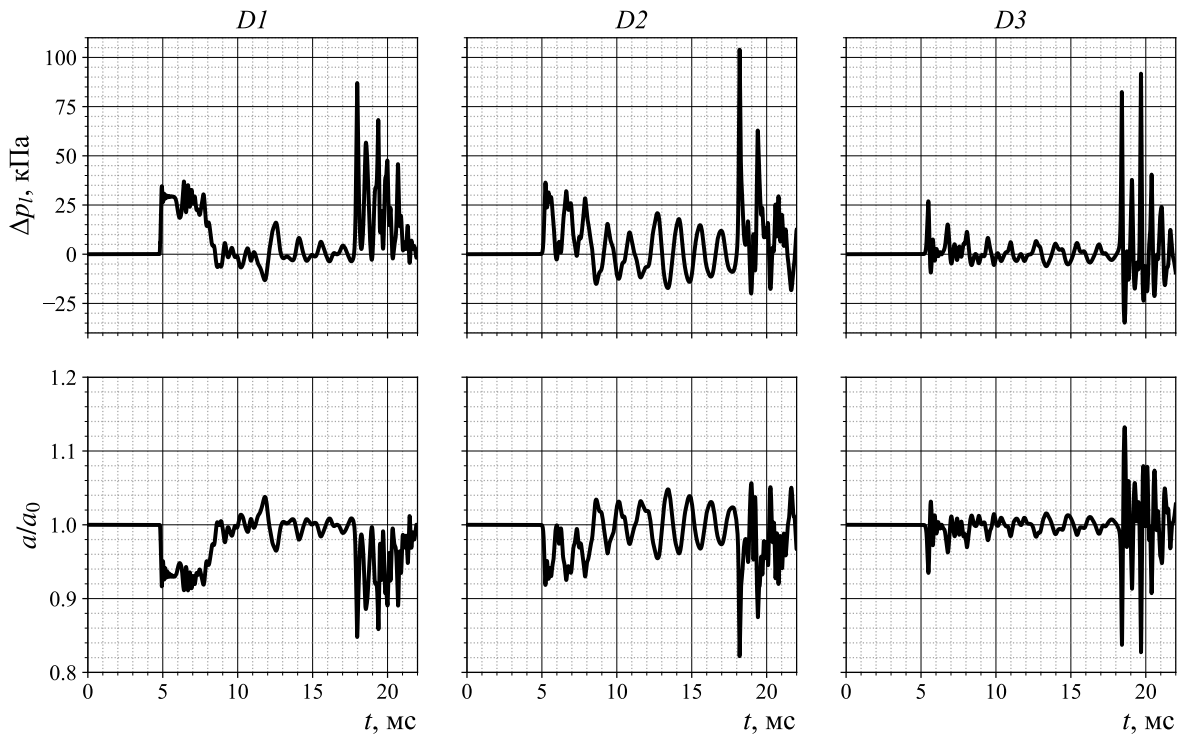


Рис. 5. Осциллограммы давления, радиуса пузырьков и объемного содержания газа для датчиков D1–D3

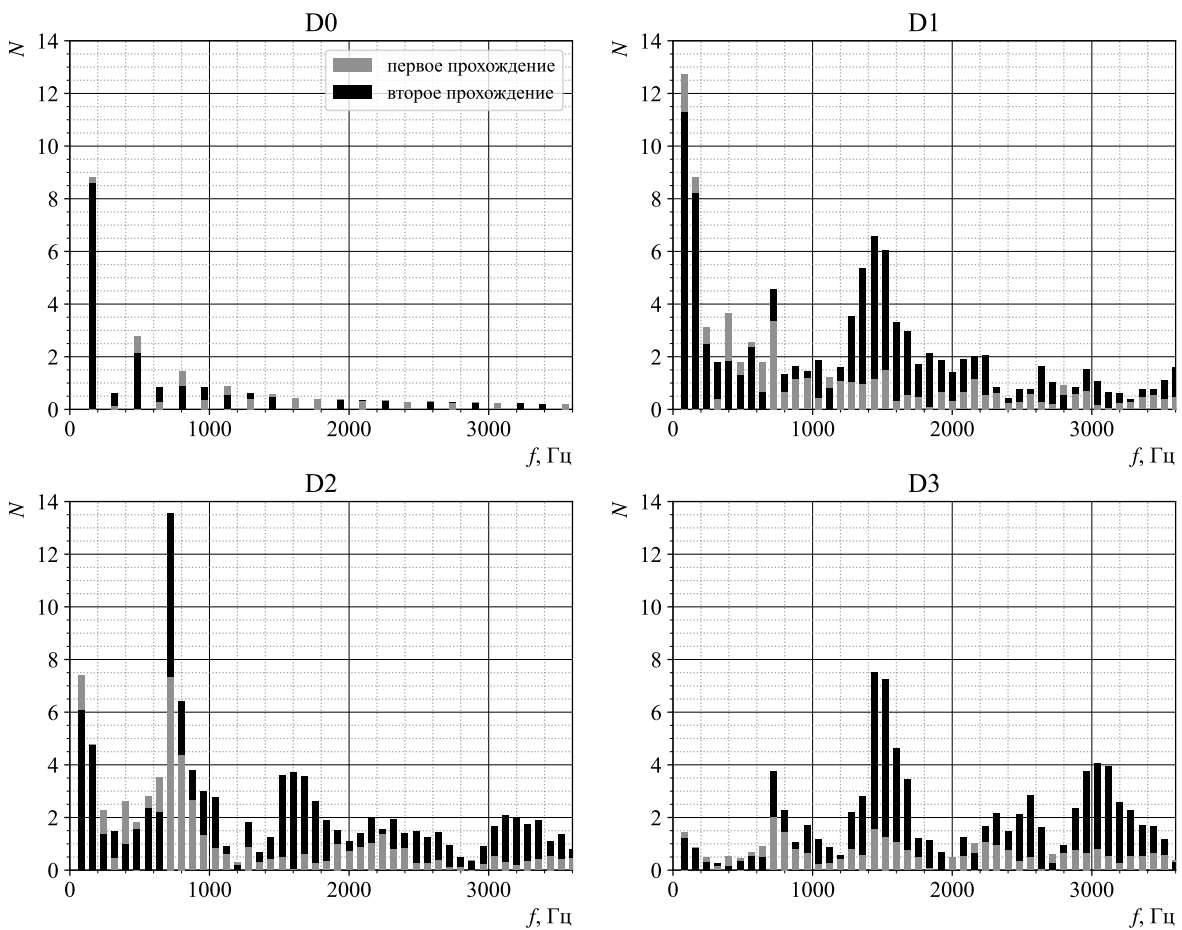


Рис. 6. Частотный спектр для первого и второго прохождения импульса на датчиках D0-D3

частот, помимо частот 78 и 165 Гц имеющих большую мощность в обоих случаях, можно выделить диапазон 1300–1700 Гц, где происходит пятикратное увеличение вклада частот в общую картину.

На диаграммах для D2 и D3 также можно сделать вывод об усилении колебаний в области средних и высоких частот. На D2 примечательной является частота 710 Гц, где происходит самый большой скачок амплитуды, что соответствует двукратному увеличению мощности на этой частоте. На D3 также следует отметить увеличение амплитуды высокочастотных колебаний. Этот эффект соответствует описанным ранее преотражениями УВИ в области пузырьковой жидкости. На всех диаграммах, кроме D3, частоты выше 6000 Гц имеют очень малую мощность.

Частичное смещение частот к значениям 3000–4000 Гц может свидетельствовать о проявлении резонансной частоты пузырьков (частота Минаерта). Результаты, приведенные на рис. 5, свидетельствуют о сжатии пузырьков до 12%, таким образом, частота Минаерта при параметрах расчета может варьироваться от 3260 до 3700 Гц, что объясняет наличие заметной мощности в указанном диапазоне на рис. 6.

4. Заключение

Таким образом, в статье исследована начально-граничная задача (1)–(11) о воздействии ударно-волнового импульса на пузырьковую жидкость и возбуждения в ней волны давления. С помощью метода контрольного объема установлено следующее утверждение. Повторное прохождение ударно-волнового импульса через слой жидкости, насыщенной пузырьками, может вызвать резкое кратковременное увеличение амплитуды давления протяженностью до 0.5 мс. Рост амплитуды может составлять более семи раз по сравнению с падающим импульсом.

В частотном спектре сигнала при повторном прохождении появляются более высокие частоты (до 6000 Гц) по сравнению с первым прохождением, где основными являются частоты до 1000 Гц.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов / Author Contributions

Концептуализация / Conceptualization: ACP (ASR); Методология / Methodology: ACP (ASR); Программное обеспечение / Software: ACP (ASR); Создание черновика рукописи / Writing – original draft: ACP (ASR), ЭРЗ (ERZ); Создание рукописи и ее редактирование / Writing – review & editing: ACP (ASR), ЭРЗ (ERZ); Визуализация / Visualization: ACP (ASR), ЭРЗ (ERZ);

Список литературы / References

- [1] Зайцев ВЮ, Колпаков АВ, Назаров ВЕ. Детектирование акустических импульсов в речном песке. Эксперимент. *Акустический журнал*. 1999;45(2):235–241. https://www.akzh.ru/pdf/1999_2_235-241.pdf
- [2] Дучков АД, Дучков АА, Дугаров ГА, Дробчик АН. Скорости ультразвуковых волн в песчаных образцах, содержащих воду, лёд или гидраты метана и тетрагидрофурана (лабораторные измерения). *Доклады Академии наук*. 2018;478(1):94–99. <https://doi.org/10.7868/S086956521801019X>
- [3] Gubaidullin AA, Pyatkova AV. Specificities of Heat Transfer in a Vibrating Cylindrical Cavity at the Transition of the Exposure Frequency Through Resonance. *Lobachevskii J. Math.* 2022;43:1069–1075. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080121>
- [4] Сычев АИ. Сильные ударные волны в пузырьковых средах. *Журнал технической физики*. 2010;80(6):31–35. <https://elibrary.ru/rctszx>
- [5] Sychev AI. Intense shock waves in bubble media. *Technical Physics*. 2010;55(6):783–788. <https://doi.org/10.1134/S1063784210060058>
- [6] Суров ВС. К расчёту ударно-волновых процессов в пузырьковых жидкостях. *Журнал технической физики*. 1998;68(11):12–19. <https://elibrary.ru/rynyub>
- [7] Surov VS. Calculating shock-wave processes in bubbly liquids. *Tech. Phys.* 1998;43:1280–1287. <https://doi.org/10.1134/1.1259184>
- [8] Галимзянов МН, Лепихин СА, Чиглинцев ИА. Распространение нелинейных волн в каналах переменного сечения, сопровождаемое образованием гидрата газа. *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.* 2012;(3/1(94)):103–115. <https://elibrary.ru/pjfbzt>
- [9] Galimzyanov MN, Lepikhin SA, Chiglintsev IA. Propagation of Nonlinear Waves in Channels With Variable Cross-Section, Led to the Gas Hydrate Formation. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*. 2012;(3/1(94)):103–115. (in Russian)
- [10] Кедринский ВК, Шокин ЮИ, Вшивков ВА, Дудникова ГИ, Лазарева ГГ. Генерация ударных волн в жидкости сферическими пузырьковыми кластерами. *Доклады Академии наук*. 2001;381(6):773–776. <https://elibrary.ru/mjuaby>
- [11] Kedrinskiĭ VK, Shokin YuI, Vshivkov VA, Dudnikova GI, Lazareva GG. Generation of shock waves by spherical bubble clusters in a liquid. *Doklady Physics*. 2001;46(12):856–859. <https://doi.org/10.1134/1.1435529>
- [12] Авдеев КА, Аксенов ВС, Борисов АА, Тухватуллина РР, Фролов СМ, Фролов ФС. Численное моделирование воздействия ударной волны на пузырьковую среду. *Горение и взрыв*. 2015;8(2):45–56. <https://elibrary.ru/vqzwlj>
- [13] Avdeyev KA, Aksenov VS, Borisov AA, Tukhvatullina RR, Frolov SM, Frolov FS. Numerical Modeling of the Impact of Shockwave on Bubbly Environment. *Combustion and explosion – Gorenĭe i vzryv*. 2015;8(2):45–56. (in Russian)
- [14] Hemmi K, Kanagawa T. Impact of a bubble-bubble interaction on nonlinear acoustic properties of pressure waves in a non-dilute bubbly liquid. *Results in Engineering*. 2025;25:103752. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2024.103752>
- [15] Пригожих ВА, Дамдинов ББ. Моделирование распространения звука в жидкости с пузырьками воздуха. *Вестник Бурятского государственного университета. Химия. Физика*. 2025;(1):49–55. <https://doi.org/10.18101/2306-2363-2025-1-49-55>
- [16] Prigozhikh VA, Damdinov BB. Modeling the Propagation of Sound in a Liquid Containing Air Bubbles. *BSU bulletin. Chemistry. Physics*. 2025;(1):49–55. (in Russian)
- [17] Галимзянов МН, Болотнова РХ, Агишева УО, Бузина ВА. Гидродинамика ударных волн и вскипающих потоков в пузырьковых жидкостях. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011;(4--3):700–701. <https://elibrary.ru/rufbmj>
- [18] Galimzyanov MN, Bolotnova RKh, Agisheva UO, Buzina VA. Hydrodynamics of Shock Waves and Boiling Flows in Bubbly Liquids. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 2011;(4--3):700–701. (in Russian)
- [19] Gimaitdinov IK, Rodionov AS, Valiakhmetova OYu. Initial-boundary Value Problem of the Transfer of a Shock Impulse Falling from a Gas into a Powdered Medium Saturated with a Gas-Liquid Mixture. *Lobachevskii J. Math.* 2025;46:3298–3306. <https://doi.org/10.1134/S1995080225608793>
- [20] Губайдуллин ДА, Никифоров АА. Акустические волны в вязкоупругих пузырьковых средах. *Теплофизика высоких температур*. 2019;57(1):150–153. <https://doi.org/10.1134/S0040364419010290>
- [21] Gubaidullin DA, Nikiforov AA. Acoustic Waves in Viscoelastic Bubbly Media. *High Temperature*. 2019;57(1):133–136. <https://doi.org/10.1134/S0018151X1806010X>
- [22] Нигматулин РИ, Губайдуллин АА, Берегова ОШ. Метод сверхсильного резонансного сжатия пузырьковой жидкости умеренным непериодическим воздействием. *Доклады Академии наук*. 2000;374(4):489–492. <https://elibrary.ru/xlbmgh>
- [23] Nigmatulin RI, Gubaidullin AA, Beregova OSh. Method of resonance overcompression in a bubble liquid by a moderate aperiodic action. *Doklady Physics*. 2000;45(10):539–542. <https://doi.org/10.1134/1.1327326>
- [24] Губин СА, Сверчков АМ, Сумской СИ. Моделирование генерации и распространения ударных волн и волн сжатия в пузырьковых средах. *Горение и взрыв*. 2021;14(1):47–58. <https://doi.org/10.30826/CE21140106>

[1] Зайцев ВЮ, Колпаков АВ, Назаров ВЕ. Детектирование акустических импульсов в речном песке. Эксперимент. *Акустический журнал*. 1999;45(2):235–241. https://www.akzh.ru/pdf/1999_2_235-241.pdf

[2] Дучков АД, Дучков АА, Дугаров ГА, Дробчик АН. Скорости ультразвуковых волн в песчаных образцах, содержащих воду, лёд или гидраты метана и тетрагидрофурана (лабораторные измерения). *Доклады Академии наук*. 2018;478(1):94–99. <https://doi.org/10.7868/S086956521801019X>

Duchkov AD, Duchkov AA, Dugarov GA. et al. Velocities of Ultrasonic

- Gubin SA, Sverchkov AM, Sumskey SI. Simulation of Generation and Propagation of Shock/compression Waves in Bubbly Media. *Combustion and explosion – Gorenie i vzryv*. 2021;14(1):47–58. (in Russian)
- [16] Delale C, Nas S, Tryggvason G. Direct numerical simulations of shock propagation in bubbly liquids. *Physics of Fluids*. 2005;17:121705. <https://doi.org/10.1063/1.2158431>
- [17] Ахметов АТ, Гималтдинов ИК, Азаматов МА, Мухаметзянов АФ, Богданов ДР. Зондирование водогазонасыщенных насыпных сред преотраженными волнами непосредственно после воздействия ударной волны. *Письма в Журнал технической физики*. 2022;48(1):23–26. <https://doi.org/10.21883/PJTF.2022.01.51874.18834>
- Akhmetov AT, Gimaltidinov IK, Azamatov MA, Mukhametzyanov AF, Bogdanov DR. Sounding of Water-Gas-Saturated Bulk Media by Rereflected Waves Immediately after the Impact of a Shock Wave. *Technical Physics Letters*. 2022;48:97–102. <https://doi.org/10.1134/s1063785022040022>
- [18] Нигматулин РИ. Динамика многофазных сред. Часть 1. М.: Наука; 1987. 464 с.
- Nigmatulin RI. Dynamics of Multiphase Media. Vol. 1. Hemisphere, N.Y.; 1990. 532 p.
- [19] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат. 1984; 152 с.
- Patankar SV. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere. 1980; 214 p.

Сведения об авторах / Information about the Authors

Артем Сергеевич Родионов

кандидат физ.-мат. наук, доцент
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный нефтяной технический
университет», Уфа, Российская Федерация

Artem Sergeevich Rodionov

Ph.D. (Phys. & Math.), Assist. Prof.

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher
Education “Ufa State Petroleum Technological University”

artrodionov@mail.ru

ORCID: [0009-0007-0425-5130](https://orcid.org/0009-0007-0425-5130)

Эльнора Расимовна Закирова

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный нефтяной технический
университет», Уфа, Российская Федерация

Elnara Rasimovna Zakirova

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher
Education “Ufa State Petroleum Technological University”

elnara.zakirova@list.ru

ORCID: [0009-0001-2098-4276](https://orcid.org/0009-0001-2098-4276)



Плоские движения идеального газа без расширений со специальной термодинамикой

С.В. Хабиров✉

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Российская Федерация

E-mail: habirov@anrb.ru

Аннотация. Дифференциальные уравнения движения идеального газа с переменной энтропией и специальной термодинамикой являются переопределенной системой. Если значения термодинамических параметров лежат на кривой или один из параметров постоянен, то переопределенная система одна и та же для любого уравнения состояния. В плоском случае все решения были найдены двумя способами в специальных лагранжевых координатах. Первый способ приводит систему в инволюцию, когда получают конечное число дифференциальных следствий, не порождающих новых. Второй способ получает бесконечную переопределенную систему дифференциальных уравнений на вспомогательные величины, которые получены интегрированием дифференциальных следствий исходной системы. В настоящей работе уточняется второй способ получения восьми типов точных решений, которые зависят максимум от одной существенной произвольной функции одного аргумента и нескольких постоянных. В результате получены 8 типов решений переопределенной системы. Классификация проведена с точностью до бесконечной группы преобразований, допускаемых системой в лагранжевых переменных. Цель работы — получение дифференциальных следствий, которые можно интегрировать по времени и представить их в виде бесконечной переопределенной цепочки дифференциальных уравнений для вспомогательных функций. Для каждого типа решений показаны примеры гладкого движения частиц газа для любого значения времени. Траектории могут быть параболами, кривыми с переменной выпуклостью, окружностями, кривыми, колеблющимися возле прямой, линейно растущими спиралями, конечной частью степенной кривой с периодическими колебаниями на ней, гиперболами, спиралями, растущим по экспоненциально гиперболическому закону в специально распределенной термодинамической среде.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики; однопараметрическая термодинамика; плоские движения; интегрируемые условия совместности; общее решение

Финансирование: Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

Цитирование: Хабиров С.В. Плоские движения идеального газа без расширений со специальной термодинамикой. *Многофазные системы*. 2026;21(2):81–98.

The plane motions of the ideal gas without extension with the spetial thermodynamics

S.V. Khabirov✉

Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russian Federation

E-mail: habirov@anrb.ru

Abstract. The differential equations of a motion of the ideal gas with varying entropy and the spatial thermodynamics are an overdetermined system. If values the thermodynamic parameters lie on a curved line or one of the parameters is a constant then the overdetermined system is the same for any state equation. In the plane case all solutions were obtained by two ways in the spatial Lagrange coordinates. The first way leads the system in involution when we obtain the finite number differential consequences no generated new. The second way gives an infinite overdetermined system of differential equations for auxiliary values that were obtained by integration of differential consequences of the initial system. Here we correct the second way obtaining of eight types of the exact solutions maximum depending on one essential arbitrary function of one argument and several constants. The classification was led to within infinite group of transformations admitted by system in the Lagrange coordinates. The objective of the paper is obtaining differential consequences which may be integrated by the time and to represent them in the type of infinite overdetermined chain of differential equations for auxiliary functions. The examples of the smooth movement of a gas particle for any time were given for each type of the solutions. The trajectories maybe parabolas, curves with variable convexity, circles, curves oscillating alone side the straight line, linearly growing spirals, finite part of the power curve with the periodic vibrations on it, hyperbolas, spirals growing by exponentially hyperbolic law in the spatially distributed thermodynamic medium.

Keywords: equations of gas dynamics; one-parameter thermodynamics; plane motions; integrable compatibility conditions; general solution

Funding: The work was carried out with the support of the state budget under the state assignment 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

Cite: Khabirov SV. The plane motions of the ideal gas without extension with the spetial thermodynamics. *Multiphase Systems*. 2026;21(2):81–98.

1. Введение

Термодинамические величины p — давление, ρ — плотность, S — энтропия, T — температура, ε — удельная внутренняя энергия связаны тождеством $TdS = d\varepsilon + pd\rho^{-1}$. Если $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S)$ — уравнение состояния, то $T = \varepsilon_S$, $p = \rho^2 \varepsilon_\rho = f(\rho, S)$. Уравнения газовой динамики, полученные из законов сохранения массы, импульса и энергии, таковы

$$D\rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \rho D\vec{u} + \nabla p = 0, \quad D\varepsilon + p\rho^{-1} \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

где \vec{u} — скорость частицы в точке с вектором \vec{x} ; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент. Для остальных термодинамических величин следуют уравнения

$$Dp + \rho f_\rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad DT + \rho \varepsilon_S \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

$$DS = S_t + \vec{u} \cdot \nabla S = 0.$$

Если температура T постоянна, то переопределенная система тепловых движений

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad D\vec{u} + \nabla i = 0, \quad Di = 0$$

не приведена в инволюцию в трехмерном пространстве $R^3(\vec{x})$. Здесь $i = \varepsilon + p\rho^{-1} - TS$ — полный термодинамический потенциал. Если плотность ρ постоянна, то система та же с заменой $i \rightarrow \rho^{-1}p$ [1]. Система будет та же, если постоянны p [2] или ε , или неизоэнтropicское движение с термодинамическими параметрами, лежащими на кривой $p = p(\lambda)$, $\rho = \rho(\lambda)$, $S = S(\lambda)$, $T = T(\lambda)$, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$, где λ — параметр с заменой $i \rightarrow \int \rho^{-1} p' d\lambda$. Такие движения газа называют движениями со специальной термодинамикой [3]. Примеры исследований таких движений можно найти в работах [4–8].

В плоском случае $R^2(\vec{x})$ все решения переопределенной системы найдены двумя способами [1, 4]. Дифференциальные уравнения движения принимают следующий вид:

$$D\vec{u} + \nabla i = 0, \quad Di = (\partial_t + u\partial_x + v\partial_y)i = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = u_x + v_y = 0, \quad D\omega = 0, \quad \omega = v_x - u_y.$$

Здесь декартовы переменные $\vec{x} = (x, y)$; $\vec{u} = (u, v)$; ω — завихренность. В переменных Лагранжа t, ξ, η :

$$x_t = u, \quad y_t = v, \quad x(0) = \xi, \quad y(0) = \eta,$$

$$x_t(0) = u_0(\xi, \eta), \quad y_t(0) = v_0(\xi, \eta)$$

производные замены $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ связаны с производными обратной замены $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ равенствами $J\xi_x = y_\eta$, $J\xi_y = -x_\eta$, $J\eta_x = -y_\xi$, $J\eta_y = x_\xi$, $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$.

Уравнения плоских тепловых движений в лагранжевых переменных таковы:

$$i_t = 0, \quad \omega_t = 0, \quad J_t = J \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

$$Jx_{tt} + i_\xi y_\eta - i_\eta y_\xi = 0, \quad Jy_{tt} - i_\xi x_\eta + i_\eta x_\xi = 0,$$

Имеем три интеграла $i = i(\xi, \eta)$, $\omega = \omega(\xi, \eta)$, $J = 1$ и представления для начальной скорости и завихренности $0 = (u_x + v_y)|_{t=0} = u_{0\xi} + v_{0\eta} \Rightarrow u_0 = -\Psi_\eta$, $v_0 = \Psi_\xi$, $\omega = \Delta\Psi$.

Если $i = i_0$ — постоянная величина, то получаются уравнения изобарических движений:

$$x = \xi - t\Psi_\eta, \quad y = \eta + t\Psi_\xi, \quad \omega = \Delta\Psi, \quad \Psi_{\xi\xi}\Psi_{\eta\eta} = \Psi_{\xi\eta}^2.$$

Последнее уравнение Монжа–Ампера задает линейчатую поверхность

$$\Psi = \lambda - f(\lambda)\xi - g(\lambda)\eta, \quad f'(\lambda)\xi + g'(\lambda)\eta = 1,$$

где f, g — произвольные функции; λ — параметр.

Пусть $i(\xi, \eta) \neq \text{const}$, тогда рассмотрим замену лагранжевых переменных, сохраняющую площадь $i_\xi j_\eta - i_\eta j_\xi = 1$. Все решения этого уравнения образуют псевдогруппу. Обратная замена удовлетворяет такому же условию. Выполняются соотношения

$$i_\xi = \eta_j, \quad i_\eta = -\xi_j, \quad j_\xi = -\eta_i, \quad j_\eta = \xi_i.$$

Два уравнения из трех подмодели плоских тепловых движений линеаризуются [1, 4]:

$$x_{tt} + y_j = 0, \quad y_{tt} = x_j, \quad x_i y_j - x_j y_i = 1.$$

С помощью матрицы поворота на угол $-\frac{\pi}{2}$ система записывается в векторном виде:

$$\vec{x}_j = O\vec{x}_{tt}, \quad \vec{x}_i \cdot O\vec{x}_j = 1,$$

$$O = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Матрица O имеет свойства:

$$O^2 = -E, \quad O^T = O^{-1} = -O, \quad \text{tr}O = 0, \quad |O| = 1.$$

Система (1) допускает группу G преобразований:

- 1) переносы $t' = t + a_0$, $i' = i + b_0$, $j' = j + g(i)$, $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$;
- 2) галилеевы переносы $\vec{x}' = \vec{x} + t\vec{b}$;
- 3) вращения $\vec{x}' = \Lambda\vec{x}$, $\Lambda\Lambda^T = E$, $|\Lambda| = 1$;
- 4) растяжения $t' = at$, $j' = a^2 j$, $i' = a^{-2} b^2 i$, $\vec{x}' = b\vec{x}$;
- 5) отражения $t' = -t$, $y' = -y$, $j' = -j$.

Здесь $a_0, b_0, a, b, \vec{a}, \vec{b}, \Lambda$ — постоянные; $g(i)$ — произвольная функция. Эти замены переменных являются преобразованиями эквивалентности в выборе лагранжевых замен.

Решения переопределенной системы (1) разыскиваем с точностью до преобразований группы G . Приведение системы в инволюцию заключается в получении конечного числа дифференциальных следствий не порождающих новых, что было проделано в работе [1] с помощью дополнительной комплексной замены и аналитических компьютерных вычислений. В работе [4] исключаются производные по переменной j во всех дифференциальных следствиях. Получается частично интегрируемая цепочка уравнений. Далее исключаются производные по переменной i , что приводит к цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений. Определяются интегрируемые соотношения и все возможные представления решений по переменной t . Исследование каждого представления приводит к общему решению векторной системы. Конечной инволютивной системы здесь не получают. В этой работе есть опечатки, недоказанные утверждения и упущенные решения. Здесь исправлены все недостатки статьи [4]. Подробные доказательства утверждений, пример применения нового метода получения решений переопределенной системы дифференциальных уравнений требуют повторного вывода ранее полученных формул [4] и получения новых соотношений. Описаны движения частиц газа для всех решений.

2. Условия совместности подмодели

Исключение производной по j приводит к скалярному уравнению

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_2 = -1 = p_0.$$

Здесь и далее $\vec{x}_k = \vec{x}^{(k)}$ — производная порядка k по переменной t . Дифференцирование по j , исключение производных по j в силу (1) и интегрирование по t дают равенства

$$\vec{x}_i \cdot O\vec{x}_3 - \vec{x}_1 \cdot O\vec{x}_2 = q_0(i, j) = -\omega(i, j).$$

Здесь $\omega(i, j)$ — завихренность.

Дальнейшее дифференцирование по j , исключение производных по j в силу (1) и трижды дифференцирование по t скалярного уравнения дают равенства

$$\vec{x}_{1i} \cdot \vec{x}_3 = p_1, \quad 4p'_1 = q_{0j},$$

где штрихом обозначена производная по t .

По индукции доказываем цепочку равенств [4]:

$$(\vec{x}_{k+1})_i \cdot \vec{x}_{k+3} = p_{k+1}, \quad 4p'_{k+1} = p'''_k + q_{kj}, \quad (2)$$

$$(\vec{x}_k)_i \cdot O\vec{x}_{k+3} - (\vec{x}_{k+1})_i \cdot O\vec{x}_{k+2} = q_k, \quad (3)$$

$$q'_k = p_{kj}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где вспомогательные функции p_k — полиномы по t степени не выше $2k - 1$; q_k — полиномы по t степени не выше $2k$; штрих означает дифференцирование по t .

Дифференцирование по t равенства (2), где число k заменено на $k - 1$, совместно с (3) дает систему линейных уравнений для определения вектора $(\vec{x}_{k+1})_i$:

$$\begin{aligned} (x_{k+1})_i x_{k+2} + (y_{k+1})_i y_{k+2} &= p'_k - (\vec{x}_k)_i \cdot \vec{x}_{k+3}, \\ - (x_{k+1})_i y_{k+2} + (y_{k+1})_i x_{k+2} &= q_k - (\vec{x}_k)_i \cdot O\vec{x}_{k+3}. \end{aligned}$$

Отсюда находим $(\vec{x}_{k+1})_i$, если $(\vec{x}_{k+2})^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} (\vec{x}_{k+2})^2 (\vec{x}_{k+1})_i &= p'_k \vec{x}_{k+2} - q_k O\vec{x}_{k+2} - \\ &- p_k \vec{x}_{k+3} + ((\vec{x}_k)_i \cdot O\vec{x}_{k+2}) O\vec{x}_{k+3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Умножение на \vec{x}_{k+3} дает соотношение с производными только по t :

$$\begin{aligned} p_{k+1} (\vec{x}_{k+2})^2 &= p'_k \vec{x}_{k+2} \cdot \vec{x}_{k+3} - \\ &- q_k \vec{x}_{k+3} \cdot O\vec{x}_{k+2} - p_k (\vec{x}_{k+3})^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (4), где число k заменено на $k - 1$, дифференцируем по t . В силу соотношений (3), (5) производные по i сокращаются

$$\begin{aligned} &\vec{x}_{k+3} (p_k \vec{x}_{k+1}^2 - p_{k-1} \vec{x}_{k+2}^2) + \\ &+ O\vec{x}_{k+3} (q_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - p'_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2}) + \\ &+ \vec{x}_{k+2} (2p_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - p'_k \vec{x}_{k+1}^2) + \\ &+ O\vec{x}_{k+2} (q_k \vec{x}_{k+1}^2 - 2p_{k-1} \vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} - 2q_{k-1} \vec{x}_{k+1}^2) + \\ &+ \vec{x}_{k+1} (p''_{k-1} \vec{x}_{k+1}^2 - 2p'_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2}) + \\ &+ O\vec{x}_{k+1} (2q_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - q'_{k-1} \vec{x}_{k+1}^2) = 0. \end{aligned}$$

В силу тождеств

$$\vec{x}_{k+2}^2 \vec{x}_{k+1} = (\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2}) \vec{x}_{k+2} + (\vec{x}_{k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2}) O\vec{x}_{k+2},$$

$$(\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2})^2 + (\vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1})^2 = \vec{x}_{k+2}^2 \vec{x}_{k+1}^2$$

и равенства (5) следует линейное векторное уравнение для \vec{x}_{k+3} :

$$\begin{aligned} &(p_k \vec{x}_{k+1}^2 - p_{k-1} \vec{x}_{k+2}^2) \vec{x}_{k+3} + \\ &+ (q_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - p'_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2}) O\vec{x}_{k+3} = \\ &= (p'_k \vec{x}_{k+1}^2 + (2p_k - p''_{k-1}) \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - \\ &- q'_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2}) \vec{x}_{k+2} + \\ &+ ((p''_{k-1} - 2p_k) \vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} + q'_{k-1} \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - \\ &- q_k \vec{x}_{k+1}^2) O\vec{x}_{k+2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Равенство (6) определяет вектор \vec{x}_{k+3} . Если определитель системы равен нулю, то все коэффициенты при векторах равны нулю. Вместе с (5), где k заменено на $k - 1$, получим 5 равенств:

$$m^2 p_k = n^2 p_{k-1}, \quad q_{k-1} \cos \varphi + p'_{k-1} \sin \varphi = 0,$$

$$q'_{k-1} \sin \varphi - (p''_{k-1} - 2p_k) \cos \varphi = -\frac{m}{n} p'_k,$$

$$q'_{k-1} \cos \varphi + (p''_{k-1} - 2p_k) \sin \varphi = \frac{m}{n} q_k,$$

$$p_k m^2 + p_{k-1} n^2 = mn(p'_{k-1} \cos \varphi - q_{k-1} \sin \varphi).$$

Здесь $m = |\vec{x}_{k+1}|$, $n = |\vec{x}_{k+2}|$, $\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} = mn \cos \varphi$, $\vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} = mn \sin \varphi$. Исключая величины φ , mn^{-1} получим равенства на p_k, q_k :

$$\begin{aligned} 4p_k p_{k-1} &= p_{k-1}'^2 + q_{k-1}'^2, \\ 2p_k q_{k-1}' &= p_k' q_{k-1} + q_k p_{k-1}', \\ 2p_k (p_{k-1}'' - 2p_k) &= p_k' p_{k-1}' - q_k q_{k-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты системы (6) обозначим так:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p_k m^2 - p_{k-1} n^2, \\ \beta_1 &= mn(q_{k-1} \cos \varphi + p_{k-1}' \sin \varphi), \\ \alpha_0 &= p_k' m^2 - mn((p_{k-1}'' - 2p_k) \cos \varphi - q_{k-1}' \sin \varphi), \\ \beta_0 &= mn(q_{k-1}' \cos \varphi + (p_{k-1}'' - 2p_k) \sin \varphi) - q_k m^2. \end{aligned}$$

Систему (6) умножим скалярно на векторы \vec{x}_{k+2} и $O\vec{x}_{k+2}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{x}_{k+3} \cdot \vec{x}_{k+2} - \beta_1 \vec{x}_{k+3} \cdot O\vec{x}_{k+2} &= \alpha_0 \vec{x}_{k+2}^2, \\ \beta_1 \vec{x}_{k+3} \cdot \vec{x}_{k+2} + \alpha_1 \vec{x}_{k+3} \cdot O\vec{x}_{k+2} &= \beta_0 \vec{x}_{k+2}^2. \end{aligned}$$

Отсюда находим соотношения

$$\begin{aligned} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \vec{x}_{k+3}^2 &= (\alpha_0^2 + \beta_0^2) \vec{x}_{k+2}^2, \\ (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \vec{x}_{k+3} \cdot \vec{x}_{k+2} &= (\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1) \vec{x}_{k+2}^2, \\ (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \vec{x}_{k+3} \cdot O\vec{x}_{k+2} &= (\alpha_1 \beta_0 - \beta_1 \alpha_0) \vec{x}_{k+2}^2, \end{aligned}$$

с помощью которых уравнение (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} p_{k+1}(\alpha_1^2 + \beta_1^2) &= p_k'(\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1) - \\ &- q_k(\alpha_1 \beta_0 - \beta_1 \alpha_0) - p_k(\alpha_0^2 + \beta_0^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Запишем соотношение (5), где k заменено на $k-1$:

$$p_k m^2 + p_{k-1} n^2 = mn(p'_{k-1} \cos \varphi - q_{k-1} \sin \varphi). \quad (9)$$

В силу этого равенства коэффициенты уравнения (8) принимают вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 &= m^2 n^2 (p_{k-1}'^2 + q_{k-1}'^2 - 4p_k p_{k-1}), \\ \alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 &= m^2 p_k' (p_k m^2 - p_{k-1} n^2) - \\ &- 2mn^3 p_{k-1} ((2p_k - p_{k-1}'') \cos \varphi + q_{k-1}' \sin \varphi) - \\ &- m^3 n q_k (q_{k-1} \cos \varphi + p_{k-1}' \sin \varphi) + \\ &+ m^2 n^2 [(p_{k-1}' \cos \varphi - q_{k-1} \sin \varphi) \times \\ &\times ((2p_k - p_{k-1}'') \cos \varphi + q_{k-1}' \sin \varphi) + \\ &+ (p_{k-1}' \sin \varphi + q_{k-1} \cos \varphi) \times \\ &\times ((p_{k-1}'' - 2p_k) \sin \varphi + q_{k-1}' \cos \varphi)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_0 - \beta_1 \alpha_0 &= -m^2 q_k (p_k m^2 - p_{k-1} n^2) - \\ &- 2mn^3 p_{k-1} ((p_{k-1}'' - 2p_k) \sin \varphi + q_{k-1}' \cos \varphi) - \\ &- m^3 n p_k' (q_{k-1} \cos \varphi + p_{k-1}' \sin \varphi) + \\ &+ m^2 n^2 [(p_{k-1}' \cos \varphi - q_{k-1} \sin \varphi) \times \\ &\times ((p_{k-1}'' - 2p_k) \sin \varphi + q_{k-1}' \cos \varphi) - \\ &- (p_{k-1}' \sin \varphi + q_{k-1} \cos \varphi) \times \\ &\times ((2p_k - p_{k-1}'') \cos \varphi + q_{k-1}' \sin \varphi)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 + \beta_0^2 &= m^4 (p_k'^2 + q_k'^2) + \\ &+ 2m^3 n [(p_k' q_{k-1}' - q_k (p_{k-1}'' - 2p_k)) \sin \varphi - \\ &- (p_k' (p_{k-1}'' - 2p_k) + q_k q_{k-1}') \cos \varphi] + \\ &+ m^2 n^2 ((p_{k-1}'' - 2p_k)^2 + q_{k-1}'^2). \end{aligned}$$

Подставляя коэффициенты в (8) и используя соотношение (9), получим равенство, в котором m, n, φ сокращаются:

$$\begin{aligned} p_{k+1} (4p_k p_{k-1} - p_{k-1}'^2 - q_{k-1}'^2) - \\ - p_k ((p_{k-1}'' - 2p_k)^2 + q_{k-1}'^2) - \\ - p_{k-1} (p_k'^2 + q_k'^2) + q_{k-1} (p_k' q_{k-1}' - q_k (p_{k-1}'' - 2p_k)) + \\ + p_{k-1}' (p_k' (p_{k-1}'' - 2p_k) + q_k q_{k-1}') = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$k = 1, 2, \dots$

Заметим, что соотношение (10) тождественно выполнено в силу равенства (7).

Лемма 1. Вспомогательные величины $p_0 = -1$, $q_0(i, j)$, $p_k, q_k, k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют переопределенной цепочке равенств (2), (3), (10). В особом случае (7) по индукции следует $p_k = -\frac{1}{4^k} t^{2k}$, $q_k = \frac{1}{4^k} q_0^{2k+1}$.

3. Некоторые решения условий совместности

В общем случае (10) при $k = 1$ имеем уравнения $p_0 = -1$, $q_0(i, j)$, $4p_1' = q_0j$, $4p_2' = q_1j$, $q_1' = p_1j$, $p_2(4p_1 + q_0^2) + 4p_1^3 = p_1'^2 + q_1'^2 + 2q_0 q_1 p_1$. Отсюда определяются величины:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{4} t q_0j + p_{10}(i, j), q_1 = \frac{1}{8} t^2 q_0jj + t p_{10j} + q_{10}(i, j), \\ p_2 &= \frac{1}{96} t^3 q_0jjj + \frac{1}{8} t^2 p_{10jj} + \frac{1}{4} t q_{10j} + p_{20}(i, j). \end{aligned}$$

Последнее уравнение становится полиномиальным по свободной переменной t четвертой степени. Приравняв нулю коэффициент при t^4 , получим уравнение

$$\frac{q_0jjj}{q_0jj} = \frac{3q_0jj}{2q_0j} \Rightarrow q_0jj = -2D(i) |q_0j|^{3/2}.$$

Если $D = 0$, то $q_0 = C(i)j + C_0(i)$. При $C \neq 0$ преобразования эквивалентности делают $q_0 \sim C(i)j$. Если $D \neq 0$,

то $q_0 \sim C(i)(j^{-1} + C_0(i))$, $C \neq 0$. Покажем от противного, что $C = 0$.

При $q_0 = C(i)j$, приравнявая нулю коэффициенты при степенях t , определяем величины:

$$p_{10} = -\frac{1}{4}C^2(j^2 + p_{100}(i)j + p_{1000}(i)),$$

$$q_{10} = C^3\left(-\frac{1}{4}j^3 + \frac{1}{2}j^2 p_{100} + j\left(\frac{1}{4}p_{100}^2 + \frac{1}{2}p_{1000}\right) + q_{100}\right),$$

$$p_{20} = C^4\left(-\frac{1}{16}j^4 - \frac{3}{16}j^3 p_{100} - \frac{3}{16}j^2(p_{100}^2 + p_{1000}) - \frac{1}{2}j(q_{100} + \frac{1}{4}p_{100}p_{1000} + \frac{1}{8}p_{100}^3) + \frac{1}{16}p_{100}^2 p_{1000} - \frac{1}{2}q_{100}p_{100} - \frac{1}{16}p_{1000}^2\right).$$

Остается равенство $p_{20}C^2(p_{100}j + p_{1000}) - 4p_{10}^3 + \frac{1}{16}C^2 + q_{10}^2 + 2Cj q_{10} p_{10} = 0$, которое расщепляется по переменной j . Коэффициенты при степенях $j^k, k = 1, \dots, 6$ тождественно равны нулю. Остается равенство $C^2 + C^6(4q_{100} - p_{100}p_{1000})^2 = 0 \Rightarrow C = 0$ противоречие.

При $q_0 = C(j^{-1} + C_0)$ коэффициенты при степенях t определяют величины:

$$p_{10} = -\frac{1}{4}C^2(C_0^2 + C_1(i)j^{-1} + C_2(i)j^{-2}),$$

$$q_{10} = C^3\left(\frac{1}{4}C_0^3 + \frac{1}{4}C_2^2 j^{-3} + \frac{1}{4}C_0(2C_1 - C_0)j^{-1} + C_3 j^{-2}\right),$$

$$p_{20} = -\frac{1}{16}C^4(C_2^3 j^{-4} + C_2(8C_3 - C_1 C_2)j^{-3} + (C_1^2 + 2C_0(4C_3 - C_1) + C_0^2(1 - C_2))j^{-2} + (3C_1 - 2C_0)C_0^2 j^{-1} + C_0^4).$$

Остается равенство

$$p_{20}C^2(j^{-2}(C_2 - 1) + j^{-1}(C_1 - 2C_0)) + \frac{1}{16}C^6(C_0^2 + C_1 j^{-1} + C_2 j^{-2})^3 + \frac{1}{16}C^2 j^{-4} + C^6\left(\frac{1}{4}C_0^3 + \frac{1}{4}C_2^2 j^{-3} + \frac{1}{4}C_0(2C_1 - C_0)j^{-1} + C_3 j^{-2}\right)^2 - \frac{1}{2}C^6(j^{-1} + C_0)(C_0^2 + C_1 j^{-1} + C_2 j^{-2}) \times \left(\frac{1}{4}C_0^3 + \frac{1}{4}C_2^2 j^{-3} + \frac{1}{4}C_0(2C_1 - C_0)j^{-1} + C_3 j^{-2}\right) = 0,$$

которое расщепляется по переменной j . Коэффициенты при степенях $-6, -5$ тождественно равны нулю. Коэффициент при степени -4 дает равенство $C^2 + C^6(4C_3 + C_0 - C_1(C_2 + 1))^2 = 0 \Rightarrow C = 0$ противоречие.

Итак, доказали, что $q_0(i)$ — функция, зависящая только от i :

$$p_1 = p_{10}(i, j), \quad q_1 = t p_{10j} + q_{10}(i, j),$$

$$p_2 = \frac{1}{8}t^2 p_{10jj} + \frac{1}{4}t q_{10j} + p_{20}(i, j),$$

$$\left(\frac{1}{8}t^2 p_{10jj} + \frac{1}{4}t q_{10j} + p_{20}\right)(4p_{10} + q_0^2) + 4p_{10}^3 = (t p_{10j} + q_{10})^2 + 2q_0 p_{10}(t p_{10j} + q_{10}).$$

Приравнявая нулю коэффициент при t^2 , получим уравнение для $\bar{p}_{10} = p_{10} + \frac{1}{4}q_0^2$:

$$\bar{p}_{10} \bar{p}_{10jj} = 2\bar{p}_{10j}^2 \Rightarrow \bar{p}_{10j} = -C(i)\bar{p}_{10}^2.$$

Если $C = 0$, то $p_{10}(i), q_{10j}(4p_{10} + q_0^2) = 0, (p_{20} + p_{10}^2)(4p_{10} + q_0^2) = (q_{10} + q_0 p_{10})^2$.

При $4p_{10} + q_0^2 \neq 0$ получим $q_{10}(i), p_{20}(i)$.

При $p_{10} = -\frac{1}{4}q_0^2$ получим $q_{10} = \frac{1}{4}q_0^3, p_{20}(i, j)$.

Если $C \neq 0$, то

$$\bar{p}_{10} = (Cj + C_0)^{-1} \Rightarrow p_{10} \sim -\frac{1}{4}q_0^2 + Cj^{-1}.$$

Дальнейшее расщепление по t приводит к равенствам:

$$j q_{10j} + 2q_{10} = q_0\left(\frac{1}{2}q_0^2 - 2Cj^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{10} = \frac{1}{4}q_0^3 - 2Cq_0 j^{-1} + C^2 Q(i)j^{-2},$$

$$p_{20} = \frac{1}{4}C^3 Q^2 j^{-3} - \frac{1}{2}C^2(q_0 Q + 2)j^{-2} + \frac{3}{4}C q_0^2 j^{-1} - \frac{1}{16}q_0^4.$$

При $k = 1$ получили 3 типа решений:

$$1^0. p_1 = p_{10}(i), q_1 = q_{10}(i), p_2 = p_{20}(i), 4p_{10} + q_0^2 \neq 0, (p_{20} + p_{10}^2)(4p_{10} + q_0^2) = (q_{10} + q_0 p_{10})^2.$$

$$2^0. p_1 = -\frac{1}{4}q_0^2, q_1 = \frac{1}{4}q_0^3, p_2 = p_{20}(i, j).$$

$$3^0. p_1 = -\frac{1}{4}q_0^2 + C(i)j^{-1}, C \neq 0,$$

$$q_1 = -Cj^{-2}\bar{t} + \frac{1}{4}q_0^3 - 2Cq_0 j^{-1}, \bar{t} = t - CQ,$$

$$p_2 = \frac{1}{4}Cj^{-3}\bar{t}^2 + \frac{1}{2}Cq_0 j^{-2}\bar{t} - C^2 j^{-2} + \frac{3}{4}C q_0^2 j^{-1} - \frac{1}{16}q_0^4.$$

Продолжим получение решений для переопределенной системы с $k = 2$.

В случае 1^0 уравнения (2), (3), (10) дают $q_2 = q_{20}(i, j), p_3 = \frac{1}{4}t q_{20j} + p_{30}(i, j), p_3(4p_1 p_2 - q_1^2) = 4p_2^3 - 2p_2 q_1 q_2 + p_1 q_2^2 \Rightarrow q_{20j}(4p_1 p_2 - q_1^2) = 0$:

а) Если $4p_2 p_1 \neq q_1^2$, то $q_2(i), p_3(i), (p_1 p_3 - p_2^2)(4p_1 p_2 - q_1^2) = (q_2 p_1 - p_2 q_1)^2$, получим первый тип продолжения.

б) Если $4p_1 p_2 = q_1^2$, то при $p_1 \neq 0$ получим $p_2 = \frac{1}{4}q_1^2 p_1^{-1}, q_2 = \frac{1}{4}q_1^3 p_1^{-2}, p_3 = p_{30}(i, j), q_1 q_0 = 4p_1^2 \Rightarrow q_2 = 16p_1^4 q_0^{-3}, p_2 = 4p_1^3 q_0^{-2}, q_0 \neq 0$ — второй тип продолжения.

в) Если $p_1 = q_1 = 0$, то $p_2 = 0, q_0 \neq 0$, получим новый тип продолжения.

В случае 2^0 уравнения (2), (3), (10) дают

$$q_2 = tp_{20j} + q_{20}(i, j), \quad p_3 = \frac{1}{8}t^2p_{20jj} + \frac{1}{4}tq_{20j} + p_{30}(i, j),$$

$$p_3(4p_1p_2 - q_1^2) = 4p_2^3 + p_1q_2^2 - 2q_1q_2p_2.$$

Если $q_0 = 0$, то $p_1 = q_1 = p_2 = 0$ получим продолжение, как в 1^0 В).

Последнее уравнение расщепляем по t . Коэффициент при t^2 дает уравнение

$$\bar{p}_{20}\bar{p}_{20jj} = 2\bar{p}_{20}^2,$$

$$\bar{p}_{20} = p_{20} + \frac{1}{16}q_0^4, \quad q_0 \neq 0 \Rightarrow \bar{p}_{20j} = -D\bar{p}_{20}^2.$$

Если $D = 0$, то $p_2(i), q_2 = q_{20}(i, j), p_3 = \frac{1}{4}tq_{20j} + p_{30}(i, j)$. Дальнейшее расщепление по t дает $q_{20j}(p_2 + \frac{1}{16}q_0^4) = 0, p_{30}(4p_1p_2 - q_1^2) = 4p_2^3 + p_1q_{20}^2 - 2q_1q_{20}p_2$.

Если $4p_1p_2 \neq q_1^2$, то $q_2 = q_{20}(i), p_3 = p_{30}(i)$, получим продолжение как в 1^0 а) или продолжение первого типа.

Если $4p_1p_2 = q_1^2$, то $p_2 = -\frac{1}{16}q_0^4, q_2 = \frac{1}{16}q_0^5, p_3 = p_{30}(i, j)$, получим продолжение как 1^0 б) или продолжение второго типа.

Если $D \neq 0$, то $p_2 \sim Cj^{-1} - \frac{1}{16}q_0^4, q_0 \neq 0, C \neq 0$. Уравнение (10) при $k = 2$ расщепляем по t . Коэффициент при t^2 тождественно равен нулю. Коэффициент при t дает уравнение $jq_{20j} + 2q_{20} = \frac{1}{8}q_0^5 - 2Cq_0j^{-1}$. В результате определяются величины q_{20}, p_{30} и продолжение другого типа:

$$q_2 = -Cj^{-2}\bar{t} - 2Cq_0j^{-1} + \frac{1}{16}q_0^5, \quad \bar{t} = t - Q,$$

$$p_3 = \frac{1}{4}Cj^{-3}\bar{t}^2 + \frac{1}{2}Cq_0j^{-2}\bar{t} - 4C^2q_0^{-2}j^{-2} + \frac{3}{4}Cq_0^2j^{-1} - \frac{1}{64}q_0^6.$$

При $k = 3$ определяются

$$q_3 = -\frac{1}{4}Cj^{-4}\bar{t}^3 - \frac{1}{2}Cq_0j^{-3}\bar{t}^2 + (8C^2q_0^{-2}j^{-3} - \frac{3}{4}Cq_0^2j^{-2})\bar{t} + q_{30}(i, j),$$

$$p_4 = \frac{1}{16}Cj^{-5}\bar{t}^4 + \frac{1}{8}Cq_0j^{-4}\bar{t}^3 + \left(-3C^2q_0^{-2}j^{-4} + \frac{3}{16}Cq_0^2j^{-3}\right)\bar{t}^2 + \frac{1}{4}\bar{t}q_{30j} + p_{40}(i, j).$$

Соотношение (10) уточняет представление

$$q_{30} = Q_0j^{-2} - Cq_0^3j^{-1} + \frac{1}{64}q_0^7,$$

$$p_{40} = \frac{1}{4}Cj^{-3} - \frac{1}{2}Q_0q_0j^{-2} + \frac{1}{2}Cq_0^4j^{-1} - \frac{1}{256}q_0^8.$$

Расщепление по j коэффициента при \bar{t} приводит к противоречию при степенях j^{-6} и j^{-4} .

В случае 3^0 определяются величины:

$$q_2 = -\frac{1}{4}Cj^{-4}\bar{t}^3 - \frac{1}{2}Cq_0j^{-3}\bar{t}^2 + \left(2C^2j^{-3} - \frac{3}{4}Cq_0^2j^{-2}\right)\bar{t} + q_{20}(i, j), \quad \bar{t} = t - CQ,$$

$$p_3 = \frac{1}{16}Cj^{-5}\bar{t}^4 + \frac{1}{8}Cq_0j^{-4}\bar{t}^3 + \left(\frac{3}{16}Cq_0^2j^{-3} - \frac{3}{4}C^2j^{-4}\right)\bar{t}^2 + \frac{1}{4}\bar{t}q_{20j} + p_{30}(i, j).$$

Уравнение (10) принимает вид:

$$p_3(4p_1p_2 - q_1^2) - 4p_2^3 - C^2j^{-4}p_2 - p_1\left(\frac{1}{2}Cj^{-3}\bar{t} + \frac{1}{2}Cq_0j^{-2}\right)^2 - p_1q_1^2 + q_1\left(-\frac{1}{2}C^2j^{-5}\bar{t} - \frac{1}{2}C^2q_0j^{-4} + 2p_2q_2\right) = 0$$

с многочленом степени 6 по t в левой части равенства.

Коэффициенты многочлена при степенях 4,5,6 тождественно равны нулю. Обнуление коэффициента при \bar{t}^3 дает уравнение $jq_{2j} + 2q_{20} = q_0^3\left(\frac{1}{8}q_0^2 - Cj^{-1}\right) \Rightarrow q_{20} =$

$$\frac{1}{16}q_0^5 - Cq_0^3j^{-1} + C^2Q_0j^{-2}.$$

Коэффициент при \bar{t}^2 определяет величину $p_{30} = C\left(C^2 + \frac{1}{4}\right)j^{-3} - \frac{1}{2}Q_0C^2q_0j^{-2} + \frac{5}{16}Cq_0^4j^{-1} - \frac{1}{64}q_0^6$.

Коэффициент при \bar{t} дает соотношение $C^2q_0^3(C^2 + 1) = 0 \Rightarrow q_0 = 0$.

Остается равенство $C^5j^{-6}Q_0^2 = 0 \Rightarrow Q_0 = 0$.

Уравнения (2) и (3) определяют представления для q_3 и p_4 как многочлены по t . Равенство (10) задается многочленом по t степени 12. Обнуление коэффициентов определяет решение:

$$p_0 = -1, \quad q_0 = 0, \quad p_1 = C(i)j^{-1} \neq 0,$$

$$q_1 = -C\bar{t}j^{-2}, \quad \bar{t} = t - Q(i), \quad p_2 = \frac{1}{4}C\bar{t}^2j^{-3} - C^2j^{-2},$$

$$q_2 = -\frac{1}{4}C\bar{t}^3j^{-4} + 2C^2\bar{t}j^{-3},$$

$$p_3 = \frac{1}{16}C\bar{t}^4j^{-5} - \frac{3}{4}C^2\bar{t}^2j^{-4} + C\left(C^2 + \frac{1}{4}\right)j^{-3},$$

$$q_3 = -\frac{1}{16}C\bar{t}^5j^{-6} + C^2\bar{t}^3j^{-5} - 3C\left(C^2 + \frac{1}{4}\right)\bar{t}j^{-4},$$

$$p_4 = \frac{1}{64}C\bar{t}^6j^{-7} - \frac{5}{16}C^2\bar{t}^4j^{-6} + \frac{3}{8}C\left(4C^2 + \frac{3}{2}\right)\bar{t}^2j^{-5} - C^2(C^2 + 1)j^{-4}.$$

В работе [9] доказано по индукции продолжение решения для любого k .

Рассмотрим продолжение решения цепочки нового типа:

$$p_0 = -1, q_0(i), p_1 = q_1 = 0 \Rightarrow p_2 = 0, q_2 = q_{20}(i, j).$$

Уравнения цепочки при $k = 2$ выполнены. Соотношения цепочки при $k = 3$ дают:

$$p_3 = \frac{1}{4}tq_{20j} + p_{30}(i, j), q_3 = \frac{1}{8}t^2q_{20jj} + tp_{30j} + q_{30}(i, j),$$

$$p_4 = \frac{1}{96}t^3q_{20jjj} + \frac{1}{8}t^2p_{30jj} + \frac{1}{4}tq_{30j} + p_{40}(i, j).$$

Соотношение (10) $p_4q_2^2 + 4p_3^3 = 2q_2q_3p_3$ расщепляем по переменной t и получим 4 равенства для определенных величин $q_{20}, q_{30}, p_{30}, p_{40}$:

$$q_{20}^2q_{20jjj} + 6q_{20}^3q_{20j} = 6q_{20}q_{20j}q_{20jj} \Rightarrow (q_{20}^{-1})_{jjj} = 0,$$

$$q_{20}^2p_{30jj} + 6p_{30}q_{20j}^2 = 2q_{20}(2q_{30j}p_{30j} + p_{30}q_{20jj}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (q_{20}^{-2}p_{30})_{jj} = 0,$$

$$q_{20}^2q_{30j} + 12p_{30}^2q_{20j} = 2q_{20}(q_{30}q_{20j} + 4p_{30}p_{30j}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (q_{20}^{-2}q_{30} - 4q_{20}^{-3}p_{30}^2)_j = 0,$$

$$q_{20}^2p_{40} + 4p_{30}^3 = 2q_{20}p_{30}q_{30}.$$

Если $q_{20} = 0$, то $q_2 = p_3 = 0, q_3 = q_{30}(i, j)$ – продолжение нового типа.

Если $q_2 = q_{20} \neq 0$, то либо $p_3 = p_{30}(i), q_3 = q_{30}(i), p_4 = p_{40}(i), p_{40}q_{20}^2 = 2p_{30}(q_{20}q_{30} - 2p_{30}^2)$ – продолжение по типу 1^0 , либо $p_3 \sim jC(i) \neq 0, q_3 = C\bar{t} + 4C^2q_2^{-1}j^2, \bar{t} = t + C_0(i), p_4 = 2C^2q_2^{-1}j\bar{t} + 4C^3q_2^{-2}j^3, q_4 = C^2q_2^{-1}\bar{t}^2 +$

$12C^3q_2^{-2}j^2\bar{t} + q_{40}(i, j), p_5 = 3C^3q_2^{-2}j\bar{t}^2 + \frac{1}{4}\bar{t}q_{40j} + p_{50}(i, j).$

Если $q_{20j} \neq 0$, то возможны два типа решений:

1) $q_{20} \sim C(i)j^{-1}, p_{30} = C_1(i)j^{-1} + C_2(i)j^{-2},$

$$q_{30} = Q(i)j^{-2} + 4C^{-1}(C_1j^{-1} + C_2^2j^{-3}),$$

$$p_{40} = 2C^{-2}(C_1j^{-1} + C_2j^{-2})(CQj^{-1} + 2(C_1 - C_2j^{-1})^2);$$

2) $q_{20} \sim C(i)(j^2 - C_0(i))^{-1}, p_{30} = (C_1j + C_2)q_{20},$

$$q_{30} = q_{20}(C_3q_{20} + 4(C_1j + C_2)^2),$$

$$p_{40} = 2q_{20}(C_1j + C_2)(C_3q_{20} + 2(C_1j + C_2)^2).$$

Таким образом, продолжение решения нового типа возможно с функциональной зависимостью от переменной j . Например, при $p_3 = C(i)j \neq 0$ соотношения цепочки при $k = 4$ дают:

$$q_3 = C\bar{t} + 4C^2q_2^{-1}j^2, \bar{t} = t + q_{30}(i),$$

$$p_4 = 2C^2q_2^{-1}j\bar{t} + 4C^3q_2^{-2}j^3,$$

$$q_4 = 2C^2q_2^{-1}\bar{t}^2 + 12C^3q_2^{-2}j^2\bar{t} + 16C^4q_2^{-3}j^4,$$

$$p_5 = 3C^3q_2^{-2}j\bar{t}^2 + 16C^4q_2^{-3}j^3\bar{t} + 16C^5q_2^{-4}j^5.$$

Покажем, что существует решение переопределенной цепочки (2), (3), (10) по типу 1^0a : $p_0 = -1, q_0(i), p_1(i), q_1(i), 4p_1 + q_0^2 \neq 0, (p_2(i) + p_1^2)(4p_1 + q_0^2) = (q_1 + q_0p_1)^2, q_2(i), 4p_1p_2 \neq q_1^2, (p_1p_3(i) - p_2^2)(4p_1p_2 - q_1^2) = (q_2p_1 - q_1p_2)^2 \Rightarrow 4p_1^2 \neq q_0q_1.$

При $k = 3, 4p_2p_3 \neq q_2^2 \Rightarrow 4p_2^2 \neq q_1q_2, q_3(i), (p_2p_4(i) - p_3^2)(4p_2p_3 - q_2^2) = (p_2q_3 - q_2p_3)^2.$ Пусть $p_k(i), q_k(i), 4p_kp_{k-1} \neq q_{k-1}^2, (p_{k-1}p_{k+1}(i) - p_k^2)(4p_kp_{k-1} - q_{k-1}^2) = (p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k)^2.$ Тогда $q_{k+1}(i, j), 4p'_{k+2} = q_{k+1,j} \Rightarrow$

$$p_{k+2} = \frac{1}{4}tq_{k+1,j} + p_{k+2,0}(i, j), p_{k+2}(4p_{k+1}p_k - q_k^2) = 4p_{k+1}^3 + p_kq_{k+1}^2 - 2q_kq_{k+1}p_{k+1}.$$
 Если $4p_{k+1}p_k \neq q_k^2 \Leftrightarrow 4p_k^2 \neq q_kq_{k-1},$ то расщепление по t дает $q_{k+1}(i), p_{k+2}(i).$ Доказали по индукции утверждение.

Лемма 2. Существует решение цепочки переопределенных равенств (2), (3), (10) вида $p_0 = -1, q_0(i), p_k(i), q_k(i), k = 1, 2, \dots$ Величины $p_{k+1}(i)$ определяются из равенств $(p_{k+1}p_{k-1} - p_k^2)(4p_{k-1}p_k - q_{k-1}^2) = (p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k)^2$ с условиями для $p_1, q_k: 4p_{k-1}p_k \neq q_{k-1}^2 \Leftrightarrow 4p_k^2 \neq q_kq_{k-1}, 4p_1 + q_0^2 \neq 0.$

Получим решение цепочки по типу 2^0 :

$$p_0 = -1, q_0(i) \neq 0, p_1 = -\frac{1}{4}q_0^2, q_1 = \frac{1}{4}q_0^3,$$

$$p_2 = -\frac{1}{16}q_0^4, q_2 = \frac{1}{16}q_0^5, p_3(i, j). \text{ Пусть } p_k = -\frac{1}{4^k}q_0^{2k},$$

$$q_k = \frac{1}{4^k}q_0^{2k+1}, p_{k+1}(i, j). \text{ Тогда } q_{k+1} = tp_{k+1,j} + q_{k+1,0},$$

$$p_{k+2} = \frac{1}{8}t^2p_{k+1,0j} + \frac{1}{4}tq_{k+1,0j} + p_{k+2,0}(i, j), (p_kp_{k+2} - p_{k+1}^2)(4p_kp_{k+1} - q_k^2) = (p_kq_{k+1} - q_kp_{k+1})^2.$$
 Если $4p_kp_{k+1} = q_k^2,$ то $p_{k+1} = -\frac{1}{4^{k+1}}q_0^{2k+2}, q_{k+1} = \frac{1}{4^{k+1}}q_0^{2k+3}, p_{k+2}(i, j)$ и индукционный переход доказан.

Лемма 3. Существует решение цепочки переопределенных равенств (2), (3), (10) вида $p_0 = -1, q_0(i), p_k(i) = -\frac{1}{4^k}q_0^{2k}, q_k(i) = \frac{1}{4^k}q_0^{2k+1}, k = 1, 2, \dots$

Переход с решения по типу $1^0(2^0)$ на решение по типу $2^0(1^0)$ возможен с некоторого номера $k.$ Решение, зависящее от переменной $j,$ цепочки переопределенных равенств, возможно, но для этого надо проверять бесконечное число условий совместности (10). Появление таких решений возможно, начиная с любого номера $k,$ т.е. неограниченное множество.

Для решений цепочки переопределенных равенств (2), (3), (10) равенства (6) принимают вид:

$$\vec{x}_{k+3}(p_{k-1}^2 + q_{k-1}^2 - 4p_kp_{k-1}) =$$

$$= \vec{x}_{k+2}(p'_{k-1}(p''_{k-1} - 2p_k) - 2p_{k-1}p'_k + q'_{k-1}q_{k-1}) +$$

$$+ O\vec{x}_{k+2}(2q_kp_{k-1} + q_{k-1}(p''_{k-1} - 2p_k) - q'_{k-1}p'_{k-1}) -$$

$$- \vec{x}_{k+1}(q_kq_{k-1} + 2p_k(p''_{k-1} - 2p_k) - p'_k p'_{k-1}) +$$

$$+ O\vec{x}_{k+1}(2p_kq'_{k-1} - q_kp'_{k-1} - q_{k-1}p'_k).$$

Для доказательства надо применить оператор O к равенству (6), исключить $O\vec{x}_{k+3}: (\alpha_1^2 + \beta_1^2)\vec{x}_{k+3} = (\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0)\vec{x}_{k+2} + (\beta_0\alpha_1 - \alpha_0\beta_1)O\vec{x}_{k+2},$ а коэффициенты вычислить в силу равенства (9) и тождества $n\vec{x}_{k+1} =$

$m(\vec{x}_{k+2} \cos \varphi - O\vec{x}_{k+2} \sin \varphi)$, $n = |\vec{x}_{k+2}|$, $m = |\vec{x}_{k+1}|$, $\vec{x}_{k+2} \cdot \vec{x}_{k+1} = mn \cos \varphi$, $\vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} = mn \sin \varphi$.

4. Полиномиальные решения

Далее рассмотрим точные решения системы (1). При выводе формул (4), (5), (6) предполагалось $\vec{x}_{k+2} \neq 0$. Рассмотрим решения, когда нарушается это условие, т.е. решение — многочлен степени n по переменной t :

$$\vec{x} = \vec{P}_n(t) = t^n \vec{D}_n + \dots + \vec{D}_0,$$

где \vec{D}_k — функции переменных i и j . Подстановка представления решения в систему (1) дает тождества по переменной t :

$$\begin{aligned} t^n \vec{D}_{nj} + \dots + t^k \vec{D}_{kj} + \dots + \vec{D}_{0j} = \\ = n(n-1)t^{n-2} O\vec{D}_n + \dots + \\ + k(k-1)t^{k-2} O\vec{D}_k + \dots + 2\vec{D}_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (t^n \vec{D}_{ni} + \dots + t^k \vec{D}_{ki} + \dots + \vec{D}_{0i}) \times \\ \times (n(n-1)t^{n-2} \vec{D}_n + \dots + 2\vec{D}_2) = -1, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Расщепление по t векторного равенства (12) дает представления для коэффициентов \vec{D}_k в виде многочленов по переменной j :

$$\vec{D}_n = \vec{k}_n(i) \neq 0, \vec{D}_{n-1} = \vec{k}_{n-1}(i), \dots$$

$$\begin{aligned} \vec{D}_k = \vec{k}_k(i) + \dots + (k+2l) \dots (k+1) \frac{j^l}{l!} O^l \vec{k}_{k+2l} + \dots + \\ + \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n \dots (k+1)}{l!} j^l O^l \vec{k}_n, & n-2l_1 = k \\ \frac{(n-1) \dots (k+1)}{l!} j^l O^l \vec{k}_{n-1}, & k+1 = n-2l_1 \end{array} \right. \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{D}_0 = \vec{k}_0(i) + \dots + \frac{(2l)!}{l!} j^l O^l \vec{k}_{2l} + \dots + \\ + \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n!}{l!} j^l O^l \vec{k}_n, & n = 2l_1 \\ \frac{(n-1)!}{l!} j^l O^l \vec{k}_{n-1}, & n = 2l_1 + 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Расщепление по t скалярного равенства (12) дает соотношения:

$$\begin{aligned} t^{2n-2} : \vec{D}_{ni} \cdot \vec{D}_n = 0, \\ t^{2n-3} : (n-2) \vec{D}_{ni} \cdot \vec{D}_{n-1} + n \vec{D}_{n-1,i} \cdot \vec{D}_n = 0, \dots \\ t^{2n-l} : \vec{D}_{ni} \cdot \vec{D}_{n-l+2} (n-l+2)(n-l+1) + \dots + \\ + \vec{D}_{n-k,i} \cdot \vec{D}_{n-l+k+2} (n-l+k+2)(n-l+k+1) + \dots + \\ + \vec{D}_{n-l+2,i} \cdot \vec{D}_n n(n-1) = 0, \quad l < n, \\ t^n : \vec{D}_{ni} \cdot \vec{D}_2 + \dots + \vec{D}_{n-k,i} \cdot \vec{D}_{k+2} (k+2)(k+1) + \dots + \\ + \vec{D}_{2i} \cdot \vec{D}_n n(n-1) = 0, \\ t^{n-1} : \vec{D}_{n-1,i} \cdot \vec{D}_2 + \vec{D}_{n-2,i} \cdot \vec{D}_3 + \dots + \\ + \vec{D}_{1i} \cdot \vec{D}_n n(n-1) = 0, \dots \end{aligned}$$

$$t^0 : \vec{D}_{0i} \cdot \vec{D}_2 = -\frac{1}{2}.$$

Случай $n = 2$, $\vec{x} = t^2 \vec{D}_2 + t \vec{D}_1 + \vec{D}_0$:

$$\begin{aligned} \vec{D}_2 = \vec{k}_2(i) \neq 0, \vec{D}_1 = \vec{k}_1(i), \\ \vec{D}_0 = 2j O \vec{k}_2 + \vec{k}_0(i); \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{2i} = 0, \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{1i} = 0, \\ \vec{k}_2 \cdot (2j O \vec{k}_{2i} + \vec{k}_{0i}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{k}_{2i} \cdot O \vec{k}_2 = 0, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{0i} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует $\vec{k}_{2i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_2 \sim \vec{e}$, $\vec{e}^2 = 1$, $\vec{k}_1 = \alpha(i) O \vec{e} + K_1 \vec{e}$, $\vec{k}_0 = \beta(i) O \vec{e} - \frac{1}{2} i \vec{e} \Rightarrow$

$$\vec{x} \sim (t^2 - \frac{1}{2} i) \vec{e} + (t \alpha(i) + 2j) O \vec{e} \quad (13)$$

Случай $n = 3$, $\vec{x} = t^3 \vec{D}_3 + t^2 \vec{D}_2 + t \vec{D}_1 + \vec{D}_0$:

$$\begin{aligned} \vec{D}_3 = \vec{k}_3(i) \neq 0, \vec{D}_2 = \vec{k}_2(i), \\ \vec{D}_1 = 6j O \vec{k}_3 + \vec{k}_1(i), \\ \vec{D}_0 = 2j O \vec{k}_2 + \vec{k}_0(i); \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_{3i} = 0, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{3i} + 3 \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_{2i} = 0, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{2i} + 3 \vec{k}_3 \cdot (6j O \vec{k}_{3i} + \vec{k}_{1i}) = 0 \Rightarrow \vec{k}_{3i} \cdot O \vec{k}_3 = 0, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{2i} + 3 \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_{1i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_3 \sim \vec{e}, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{1i} + 3 \vec{e} \cdot (2j O \vec{k}_{2i} + \vec{k}_{0i}) = 0 \Rightarrow \vec{k}_{2i} = 0, \\ \vec{k}_2 = \vec{K}_2 = \text{const}, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{1i} + 3 \vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0, \vec{K}_2 \cdot \vec{k}_{0i} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует $\vec{k}_{1i} \vec{e} = 0 \Rightarrow \vec{k}_1 = \alpha(i) O \vec{e} + K_1 \vec{e}$, $\vec{D}_1 = (6j + \alpha) O \vec{e} + K_1 \vec{e}$, $\alpha \sim 0$, $\vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_0 = \beta(i) O \vec{e} + K_0 \vec{e}$, $\beta \cdot O \vec{e} \cdot \vec{K}_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{K}_2 = K_2 \vec{e} + \vec{K}_2 O \vec{e} \neq 0$, $\beta = -\frac{1}{2} \vec{K}_2^{-1} i + \vec{K}_0 \Rightarrow$

$$\vec{x} \sim (t^3 - 2j) \vec{e} + (t^2 + 6tj - \frac{1}{2} i) O \vec{e}. \quad (14)$$

Случай $n = 4$, $\vec{x} = t^4 \vec{D}_4 + t^3 \vec{D}_3 + t^2 \vec{D}_2 + t \vec{D}_1 + \vec{D}_0$:

$$\begin{aligned} \vec{D}_4 = \vec{k}_4(i) \neq 0, \vec{D}_3 = \vec{k}_3(i), \\ \vec{D}_2 = 12j O \vec{k}_4 + \vec{k}_2(i), \\ \vec{D}_1 = 6j O \vec{k}_3 + \vec{k}_1(i), \\ \vec{D}_0 = -12j^2 O \vec{k}_4 + 2j O \vec{k}_2 + \vec{k}_0(i), \\ \vec{k}_4 \cdot \vec{k}_{4i} = 0, \\ \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_{4i} + 2 \vec{k}_4 \cdot \vec{k}_{3i} = 0 \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{k}_{3i} = 0, \\ \vec{k}_{4i} \cdot (12j O \vec{k}_4 + \vec{k}_2) + 3 \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_{3i} + 6 \vec{k}_4 \cdot (12j O \vec{k}_{4i} + \vec{k}_{2i}) = \\ = 0 \Rightarrow \vec{k}_{4i} \cdot O \vec{k}_4 = 0 \Rightarrow \vec{k}_4 \sim \vec{e}, \\ \vec{k}_{3i} \cdot (12j O \vec{e} + \vec{k}_2) + 3 \vec{k}_{2i} \cdot \vec{k}_3 + 12 \vec{e} \cdot (6j O \vec{k}_{3i} + \vec{k}_{1i}) = 0 \Rightarrow \\ \vec{k}_{3i} \cdot O \vec{e} = 0 \Rightarrow \vec{k}_3 = \vec{K}_3 = \text{const}, \vec{e} \cdot \vec{k}_{2i} = 0, \\ \vec{K}_3 \cdot \vec{k}_{2i} + 4 \vec{e} \cdot \vec{k}_{1i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_2 = \alpha(i) O \vec{e} + K_2 \vec{e}, \\ \vec{D}_2 = (12j + \alpha) O \vec{e} + K_2 \vec{e} \Rightarrow \alpha \sim 0, \vec{e} \cdot \vec{k}_{1i} = 0, \\ t : \vec{k}_{1i} (12j O \vec{e} + \vec{K}_2) + 3 \vec{e} \vec{k}_{0i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_1 = \vec{K} = \text{const}, \\ \vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0, \vec{k}_{0i} \cdot (12j O \vec{e} + \vec{K}_2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{k}_{0i} \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow \\ \vec{k}_0 = \vec{K}_0 = \text{const} \Rightarrow \text{противоречие.} \end{aligned}$$

Случай $n = 5$, $\vec{x} = t^5 \vec{D}_5 + t^4 \vec{D}_4 + t^3 \vec{D}_3 + t^2 \vec{D}_2 + t \vec{D}_1 + \vec{D}_0$:

$$\begin{aligned} \vec{D}_5 = \vec{k}_5(i) \neq 0, \vec{D}_4 = \vec{k}_4(i), \\ \vec{D}_3 = 20j O \vec{k}_5 + \vec{k}_3(i), \\ \vec{D}_2 = 12j O \vec{k}_4 + \vec{k}_2(i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{D}_1 &= -60j^2\vec{k}_5 + 6jO\vec{k}_3 + \vec{k}_1(i), \\
 \vec{D}_0 &= -12j^2\vec{k}_4 + 2jO\vec{k}_2 + \vec{k}_0(i), \\
 t^8 : \vec{k}_5 \cdot \vec{k}_{5i} &= 0, \\
 t^7 : 3\vec{k}_4 \cdot \vec{k}_{5i} + 5\vec{k}_5 \cdot \vec{k}_{4i} &= 0 \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{k}_{4i} = 0, \\
 t^6 : 3\vec{k}_{5i} \cdot (20jO\vec{k}_5 + \vec{k}_3) + 6\vec{k}_4 \cdot \vec{k}_{4i} + 10\vec{k}_5 \cdot (20jO\vec{k}_{5i} + \vec{k}_{3i}) &= 0 \Rightarrow \vec{k}_{5i} \cdot O\vec{k}_5 = 0 \Rightarrow \vec{k}_5 \sim \vec{e}, \\
 3\vec{k}_4 \cdot \vec{k}_{4i} + 5\vec{e} \cdot \vec{k}_{3i} &= 0, \\
 t^5 : 3\vec{k}_{4i} \cdot (20jO\vec{e} + \vec{k}_3) + 6\vec{k}_{3i} \cdot \vec{k}_4 + 10\vec{e} \cdot (12jO\vec{k}_{4i} + \vec{k}_{2i}) &= 0 \Rightarrow \vec{k}_{4i} \cdot O\vec{e} = 0 \Rightarrow \vec{k}_4 = \vec{K}_4 = \text{const}, \\
 3\vec{K}_4 \cdot \vec{k}_{3i} + 5\vec{e} \cdot \vec{k}_{2i} &= 0, \\
 \vec{e} \cdot \vec{k}_{3i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_3 &= \alpha(i)O\vec{e} + K_3\vec{e}, \\
 \vec{D}_3 &= (20j + \alpha)O\vec{e} + K_3\vec{e} \Rightarrow \alpha \sim 0, \vec{e} \cdot \vec{k}_{2i} = 0, \\
 \vec{k}_3 &= K_3\vec{e}, \\
 t^4 : 3\vec{K}_4 \cdot \vec{k}_{2i} + 5\vec{e} \cdot \vec{k}_{1i} &= 0, \\
 t^3 : 3\vec{k}_{2i} \cdot (20jO\vec{e} + \vec{k}_3) + 6\vec{K}_4 \cdot \vec{k}_{1i} + 10\vec{e} \cdot (2jO\vec{k}_{2i} + \vec{k}_{0i}) &= 0 \Rightarrow \vec{k}_{2i} \cdot O\vec{e} = 0 \Rightarrow \vec{k}_2 = \vec{K}_2 = \text{const}, \\
 3\vec{K}_4 \cdot \vec{k}_{1i} + 5\vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} &= 0, \vec{e} \cdot \vec{k}_{1i} = 0, \\
 t^2 : \vec{K}_4 \cdot \vec{k}_{0i} &= 0, \\
 t : \vec{k}_{1i} \cdot (12jO\vec{K}_4 + \vec{K}_2) + 3\vec{k}_{0i} \cdot (20jO\vec{e} + K_3\vec{e}) &= 0, \\
 t^0 : \vec{k}_{0i} \cdot (12jO\vec{K}_4 + \vec{K}_2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{k}_{0i} \cdot O\vec{K}_4 = 0 \Rightarrow \vec{K}_4 = 0, O\vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0, \vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_{0i} = 0 \text{ противоречие.}
 \end{aligned}$$

Случай $n > 5$. Расщепление по t соотношений (12) дает:

$$\begin{aligned}
 t^{2n-2} : \vec{k}_n \cdot \vec{k}_{ni} &= 0, \\
 t^{2n-3} : (n-2)\vec{k}_{n-1} \cdot \vec{k}_{ni} + n\vec{k}_n \cdot \vec{k}_{n-1,i} &= 0 \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{k}_{n-1,i} = 0, \\
 t^{2n-4} : (n-2)(n-3)(n(n-1)jO\vec{k}_n + \vec{k}_{n-2}) \cdot \vec{k}_{ni} + (n-1)(n-2)\vec{k}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-1,i} + n(n-1)\vec{k}_n \cdot (n(n-1)jO\vec{k}_{ni} + \vec{k}_{n-2,i}) &= 0 \Rightarrow O\vec{k}_n \cdot \vec{k}_{ni} = 0 \Rightarrow \vec{k}_n \sim \vec{e}, (n-2)\vec{k}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-1,i} + n\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-2,i} = 0, \\
 t^{2n-5} : (n-2)(n-3)(n(n-1)jO\vec{e} + \vec{k}_{n-2}) \cdot \vec{k}_{n-1,i} + (n-1)(n-2)\vec{k}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-2,i} + n(n-1)\vec{e} \cdot ((n-1)(n-2)jO\vec{k}_{n-1,i} + \vec{k}_{n-3,i}) &= 0 \Rightarrow O\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-1,i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_{n-1} = \vec{K}_{n-1} = \text{const}, (n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-2,i} + n\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-3,i} = 0, \\
 \vec{e} \cdot \vec{k}_{n-2,i} = 0 \Rightarrow \vec{D}_2 &= (n(n-1)j + \alpha)O\vec{e} + K_{n-2}\vec{e}, \\
 \vec{k}_{n-2} &= \alpha(i)O\vec{e} + K_{n-2}\vec{e} \Rightarrow \alpha \sim 0, \vec{e} \cdot \vec{k}_{n-3,i} = 0, \\
 t^{2n-6} : (n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-3,i} + n\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-4,i} &= 0.
 \end{aligned}$$

Пусть верно предположение ($5 < l < n$):

$$\begin{aligned}
 t^{2n-l} : \vec{k}_{ki} = 0, k = n, \dots, n-l+4, \vec{e} \cdot \vec{k}_{n-l+3,i} &= 0, \\
 n\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-l+2,i} + (n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-l+3,i} &= 0. \\
 \text{Тогда имеем} \\
 t^{2n-l-1} : (n-2)(n-3)(n(n-1)jO\vec{e} + \vec{K}_{n-2}) \cdot \vec{k}_{n-l+3,i} + (n-1)(n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-l+2,i} + n(n-1)\vec{e} \cdot ((n-l+3)(n-l+2)jO\vec{k}_{n-l+3,i} + \vec{k}_{n-l+1,i}) &= 0 \Rightarrow (l-5)(2n-l)O\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-l+3,i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_{n-l+3} = \vec{K}_{n-l+3} = \text{const}, \\
 \vec{e} \cdot \vec{k}_{n-l+2,i} &= 0, \\
 n\vec{e} \cdot \vec{k}_{n-l+1,i} + (n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{n-l+2,i} &= 0.
 \end{aligned}$$

Выполняется предположение индукции на следующем шаге. Это верно для

$$\begin{aligned}
 l \leq n+2 : \vec{k}_{ki} = 0, k = n, \dots, 2, \\
 \vec{e} \cdot k_{1i} = 0, n\vec{e} \cdot k_{0i} + (n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot k_{1i} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t^{n-3} : 2(n(n-1)jO\vec{e} + \vec{K}_{n-2}) \cdot k_{1i} + (n-1)(n-2)\vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{0i} &= 0 \Rightarrow O\vec{e} \cdot k_{1i} = 0 \Rightarrow k_{1i} = 0, \\
 \vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0, \vec{K}_{n-1} \cdot \vec{k}_{0i} &= 0, \\
 t^{n-4} : \vec{k}_{0i} \cdot (\vec{K}_{n-2} + n(n-1)jO\vec{e}) &= 0 \Rightarrow O\vec{e} \cdot \vec{k}_{0i} = 0 \Rightarrow \vec{k}_{0i} = 0 \text{ противоречие.}
 \end{aligned}$$

Проделанные вычисления доказывают утверждение [4].

Теорема 1. Полиномиальные по времени решения системы (1) могут иметь степень только 2 (13) и 3 (14) с точностью до преобразований группы G .

5. Гармонические решения

В случае нулевых коэффициентов уравнения (6) в силу решения переопределенной системы (2), (3), (10) по типу 2^0 : $p_k = -4^{-k}q_0^{2k}$, $q_k = 4^{-k}q_0^{2k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, $q_0 = q_0(i)$, $p_0 = -1$ имеем $q_0^2\vec{x}_{k+1}^2 = 4\vec{x}_{k+2}^2$, $\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} = 0$, $q_0\vec{x}_{k+1}^2 = 2\vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} \Rightarrow 2\vec{x}_{k+2} = q_0O\vec{x}_{k+1}$.

Отсюда следует

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{C}(i, j) \cos(at) + O\vec{C} \sin(at), \quad 2\alpha = q_0.$$

Пусть для некоторого n решение системы (1) имеет гармоническое представление $\vec{x}^{(n+1)} = \vec{C}_1(i, j) \cos(at) + O\vec{C}_1 \sin(at)$. Тогда интегрированием получим:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= \vec{P}_n(t) + \vec{C}(i, j) \cos(at) + O\vec{C} \sin(at), \\
 \alpha^{n+1}C &= (-1)^l O^l C_1, \quad n = 4k - 1 + l, \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\vec{P}_n = t^n \vec{D}_n + \dots + \vec{D}_0(i, j).$$

Подстановка представления в систему (1) дает:

$$\begin{aligned}
 \vec{P}_{nj} &= O\vec{P}_{ntt}, \vec{C}_j + \alpha^2 O\vec{C} = 0 \Rightarrow \\
 \vec{C} &= C(i)(\vec{e}_0 \sin(\alpha^2 j) + O\vec{e}_0 \cos(\alpha^2 j)) = C\vec{e}(\alpha^2 j), \\
 \vec{e}_0^2 &= 1, \quad \vec{e}_0 = \text{const}, \quad \vec{e}^2 = 1, \\
 \vec{x} &= \vec{P}_n(t) + C(i)\vec{e}(\alpha^2 j - at), \\
 (\vec{P}_{ni} + C_i\vec{e} - CO\vec{e}(2\alpha j - t)\alpha') (\vec{P}_{ntt} - C\alpha^2\vec{e}) &= -1 \Rightarrow \\
 C\alpha'(2\alpha j - t)O\vec{P}_{ntt} + C_i\vec{P}_{ntt} &= C\alpha^2\vec{P}_{ni}, \\
 \vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} &= \alpha^2 CC' - 1 \Rightarrow \\
 C'\vec{P}_{ntt} &= C\alpha^2(CC'\alpha^2 - 1) \Rightarrow C' \neq 0, n \leq 2. \\
 \text{Если } n \leq 1, \text{ то } \vec{P}_1 &= t\vec{K}_1 + \vec{K}_0 \sim 0, \\
 \vec{x} &= C(i)\vec{e}(\alpha^2 j - at), \quad \alpha^2 CC' = 1. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Если $n = 2$, то $\vec{P}_2 = t^2\vec{D}_2 + t\vec{D}_1 + \vec{D}_0$, $\vec{D}_{2j} = 0$, $\vec{D}_{1j} = 0$, $\vec{D}_{0j} = 2O\vec{D}_2$, $4\vec{D}_2^2 = C\alpha^2(\alpha^2 CC' - 1)$, $C\alpha^2(\vec{D}_{2i}t^2 + \vec{D}_{1i}t + \vec{D}_{0i}) = 2C'\vec{D}_2 + 2C\alpha'(2\alpha - t)O\vec{D}_2 \Rightarrow \vec{D}_2 \sim \vec{e}_0$, $\vec{D}_1 = \vec{K}_1 + (\alpha^{-1})'O\vec{e}_0$, $C\alpha^2\vec{D}_{0i} = 2C'\vec{e}_0 + 4C\alpha\alpha'jO\vec{e}_0 \Rightarrow \alpha' = 0$, $\alpha \sim 1$,

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &\sim \vec{e}_0(t^2 + 2 \ln|C|) + 2jO\vec{e}_0 + C\vec{e}(j - t), \\
 i &= \frac{1}{2}C^2 - 4 \ln|C|. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Теорема 2. Гармонические по времени решения системы (1) могут быть только двух типов (16) и (17) с точностью до преобразований группы G [4].

6. Представления решений для вспомогательных функций, зависящих только от i

Рассмотрим цепочку равенств (11), где $p_k(i), q_k(i)$. Уравнение при $k = 1$ дифференцируем по t $k - 1$ раз, при $k = 2$ $k - 2$ раза и т.д. при $k - 1$ один раз. В результате получим k линейных однородных уравнений для величин $\vec{x}_{k+3}, O\vec{x}_{k+2}, \vec{x}_{k+1}$, которые должны иметь ненулевое решение. Значит, ранг матрицы из коэффициентов продифференцированных уравнений не больше двух. Если ранг равен 2, то от системы остается лишь два независимых уравнения:

$$\alpha_n \vec{x}_{n+3} + \beta_n O\vec{x}_{n+2} + \gamma_n \vec{x}_{n+1} = 0,$$

$$\alpha_m \vec{x}_{n+3} + \beta_m O\vec{x}_{n+2} + \gamma_m \vec{x}_{n+1} = 0.$$

Если $\alpha_n \beta_m - \alpha_m \beta_n \neq 0$, то $\vec{x}_{n+3} = \beta \vec{x}_{n+1}, O\vec{x}_{n+2} = \alpha \vec{x}_{n+1}$. Отсюда следует равенство $\beta \vec{x}_{n+1} = -\alpha^2 \vec{x}_{n+1} \Rightarrow \beta = -\alpha^2, \vec{x}_{n+3} = -\alpha^2 \vec{x}_{n+1}$. Полученное уравнение задает гармоническое представление решения, рассмотренное выше.

Если $\alpha_n \beta_m - \alpha_m \beta_n = 0$, то ранг матрицы равен 1 и есть только одно независимое уравнение $O\vec{x}_{n+2} = \alpha \vec{x}_{n+3} + \beta \vec{x}_{n+1} \Rightarrow O\vec{x}_{n+3} = \alpha \vec{x}_{n+4} + \beta \vec{x}_{n+2}, O\vec{x}_{n+1} = \alpha \vec{x}_{n+2} + \beta \vec{x}_n + \vec{C}(i, j) \Rightarrow$

$$\alpha^2 \vec{x}_{n+4} + (2\alpha\beta + 1)\vec{x}_{n+2} + \beta^2 \vec{x}_n = -\beta \vec{C}. \quad (18)$$

При $\beta = 0$ уравнение (18) задает гармоническое представление решения. Экспоненциальное решение $e^{\lambda t}$ линейного однородного уравнения (18) имеет характеристические числа

$$\lambda^2 = \frac{1}{2\alpha^2} \left(-2\alpha\beta - 1 \pm \sqrt{4\alpha\beta + 1} \right).$$

При $4\alpha\beta + 1 = 0$ двухкратные мнимые характеристические числа $\lambda^2 = -\frac{1}{4}\alpha^{-2}$ задают представление решения линейно растущих гармоник

$$\vec{x} = \vec{P}_n(t) + (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \sin \frac{t}{2\alpha} + (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \cos \frac{t}{2\alpha}. \quad (19)$$

При $4\alpha\beta + 1 = \mu^2$ характеристические числа $\lambda = \pm \frac{\mu \mp 1}{2\alpha} \sqrt{-1}$ задают бигармоническое представление решения

$$\vec{x} = \vec{P}_n(t) + \vec{C}_1 \cos \left(\frac{\mu - 1}{2\alpha} t \right) + \vec{C}_2 \sin \left(\frac{\mu - 1}{2\alpha} t \right) + \vec{C}_3 \cos \left(\frac{\mu + 1}{2\alpha} t \right) + \vec{C}_4 \sin \left(\frac{\mu + 1}{2\alpha} t \right). \quad (20)$$

При $4\alpha\beta + 1 = -\mu^2$ характеристические числа $\lambda = \pm \frac{\mu \mp \sqrt{-1}}{2\alpha}$ задают представление решения экспоненци-

ально растущих гармоник

$$\vec{x} = \vec{P}_n(t) + \left(\vec{C}_1 e^{\frac{\mu t}{2\alpha}} + \vec{C}_2 e^{-\frac{\mu t}{2\alpha}} \right) \sin \frac{t}{2\alpha} + \left(\vec{C}_3 e^{\frac{\mu t}{2\alpha}} + \vec{C}_4 e^{-\frac{\mu t}{2\alpha}} \right) \cos \frac{t}{2\alpha}. \quad (21)$$

Лемма 4. Цепочка векторных равенств (11), где $p_k(i), q_k(i)$, имеет следующие представления решений по времени: гармонические (15), линейно растущие гармоника (19), бигармонические (20), экспоненциально растущие гармоника (21) [4].

7. Линейно растущие гармоника

Подставим представление решений (19) в виде линейно растущих гармоник в систему (1). Линейное векторное равенство расщепляем по гармоническим функциям и времени $\vec{C}_{1j} = -\frac{1}{4\alpha^2} O\vec{C}_1, \vec{C}_{3j} = -\frac{1}{4\alpha^2} O\vec{C}_3, \vec{C}_{2j} = -\frac{1}{\alpha} O\vec{C}_3 - \frac{1}{4\alpha^2} O\vec{C}_2, \vec{C}_{4j} = \frac{1}{\alpha} O\vec{C}_1 - \frac{1}{4\alpha^2} O\vec{C}_4$.

Решение представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{C}_1 &\sim n_1(i) \vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} \right), \\ \vec{C}_3 &= n_3(i) \vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} - \varphi_3(i) \right), \\ \vec{C}_2 &= -\frac{1}{\alpha} j O\vec{C}_3 + n_2(i) \vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} - \varphi_2(i) \right), \\ \vec{C}_4 &= \frac{1}{\alpha} j O\vec{C}_1 + n_4(i) \vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} - \varphi_4(i) \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\vec{e}(\psi) = \vec{e}_0 \sin \psi + O\vec{e}_0 \cos \psi, \vec{e}_\psi = -O\vec{e}, \vec{e}(j - \varphi) = \vec{e}(j) \cos \varphi + O\vec{e}(j) \sin \varphi$.

Равенства (1) после расщепления по гармоническим функциям сводится к соотношениям:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{nj} &= O\vec{P}_{ntt}, \\ \vec{P}_{ni} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_1 - \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right) &= \\ = \vec{P}_{ntt} \cdot \left(\frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) - (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4)_i \right), & \quad (23) \\ \vec{P}_{ni} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_3 + \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) &= \\ = \vec{P}_{ntt} \cdot \left(\frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) + (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2)_i \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \left(\vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1 \right) &= \left((\vec{C}_1 t + \vec{C}_2)_i + \right. \\ + \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \left. \right) \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_3 + \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) - \\ - \left((\vec{C}_3 t + \vec{C}_4)_i - \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_1 - \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 & \left((\vec{C}_1 t + \vec{C}_2)_i + \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_1 - \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right) = \\
 & = \left((\vec{C}_3 t + \vec{C}_4)_i - \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_3 + \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right), \\
 & \left((\vec{C}_1 t + \vec{C}_2)_i + \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\alpha} \vec{C}_3 + \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) = \\
 & = \left((\vec{C}_3 t + \vec{C}_4)_i - \frac{t\alpha'}{2\alpha^2} (\vec{C}_1 t + \vec{C}_2) \right) \times \\
 & \times \left(-\frac{1}{\alpha} \vec{C}_1 + \frac{1}{4\alpha^2} (\vec{C}_3 t + \vec{C}_4) \right).
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Расщепляя по t соотношения (25), получим:

$$\begin{aligned}
 & \alpha' \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3 = 0, \alpha' (\vec{C}_1^2 - \vec{C}_3^2) = 0, \\
 & (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3)_i = \frac{\alpha'}{\alpha^2} (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4), \\
 & (\vec{C}_1^2 - \vec{C}_3^2)_i + 2 \frac{\alpha'}{\alpha^2} (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 + \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3) = 0, \\
 & (\vec{C}_1^2 - \vec{C}_3^2)_i - \frac{1}{2\alpha} (\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3 + \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4)_i + \\
 & + \frac{\alpha'}{4\alpha^3} (\vec{C}_2^2 - \vec{C}_4^2) + \frac{\alpha'}{\alpha^2} (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 + \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3) = 0, \\
 & \frac{1}{2\alpha} (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4)_i + 2 (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3)_i + \\
 & + \frac{\alpha'}{4\alpha^3} \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4 + \frac{\alpha'}{\alpha^2} (\vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4 - \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2) = 0, \\
 & \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{2i} - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{4i} = \frac{1}{4\alpha} (\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4)_i, \\
 & \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{4i} + \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{2i} + \frac{1}{8\alpha} (\vec{C}_2^2 - \vec{C}_4^2)_i = 0.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Если $\alpha' \neq 0$, то $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3 = 0, \vec{C}_1^2 = \vec{C}_3^2 \Rightarrow n_1 n_3 \cos \varphi_3 = 0, n_1^2 = n_3^2 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{2}, n_1 = n_3 \neq 0, \vec{C}_1 = n(i)\vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} \right), \vec{C}_3 = O\vec{C}_1, \vec{C}_4 = O\vec{C}_2, \vec{C}_2 = \frac{j}{\alpha} \vec{C}_1 + n_2(i)\vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} - \varphi_2 \right).$

Соотношения (23) приводятся к виду:

$$\begin{aligned}
 & \vec{P}_{ni} \cdot \vec{A} + \vec{P}_{ntt} \cdot O\vec{B} = 0, \\
 & \vec{P}_{ni} \cdot O\vec{A} = \vec{P}_{ntt} \cdot \vec{B}, \vec{P}_{nj} = O\vec{P}_{ntt}, \\
 & \vec{A} = a\vec{e} + bO\vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} \right), \\
 & a = \frac{n_1}{\alpha} + \frac{n_2 \sin \varphi_2}{4\alpha^2}, \\
 & b = -\frac{1}{4\alpha^2} \left(n_1 \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) + n_2 \cos \varphi_2 \right), \\
 & \vec{B} = a_1\vec{e} + b_1O\vec{e} \left(\frac{j}{4\alpha^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 & = \left(n_1 \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) + n_2 \cos \varphi_2 \right)_i - \\
 & - \frac{\alpha'}{2\alpha^2} \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) n_2 \sin \varphi_2, \\
 b_1 & = (n_2 \sin \varphi_2)_i + \\
 & + \frac{\alpha'}{2\alpha^2} \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) \left(n_1 \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) + n_2 \cos \varphi_2 \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (24) следуют равенства:

$$\begin{aligned}
 & a\vec{P}_{ni} - b_1\vec{P}_{ntt} = bO\vec{P}_{ni} + a_1O\vec{P}_{ntt}, \\
 & \vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1 = ab_1 - ba_1 \Rightarrow \\
 & (ab_1 - ba_1)\vec{P}_{ntt}^2 = (a^2 + b^2)(ab_1 - ba_1 - 1), \\
 & (ab_1 - ba_1)\vec{P}_{ni}^2 = (a_1^2 + b_1^2)(ab_1 - ba_1 - 1).
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Сравнивая старшие степени t , получим $n = 3, \vec{D}_3 = \vec{K}_3 -$ постоянный вектор, $\vec{P}_3 = \vec{K}_3 t^3 + k_2(i)t^2 + t(6jO\vec{K}_3 + \vec{k}_1(i)) + 2jO\vec{K}_2 + \vec{k}_0(i).$

Векторное равенство (27) расщепляем по степеням t :

$$\begin{aligned}
 t^3 : O\vec{K}'_2 & = 12\alpha'\vec{K}_3 \Rightarrow \vec{k}_2 = -12\alpha O\vec{K}_3 + \vec{K}_2, \\
 jt^2 : \vec{K}_3 & = 0 \Rightarrow \vec{k}_2 = \vec{K}_2, t^2 : O\vec{K}'_1 = 4\alpha'\vec{K}_2 \Rightarrow \\
 \vec{D}_1 = \vec{k}_1 & = -4\alpha O\vec{K}_2 + \vec{K}_1, \vec{D}_0 = 2jO\vec{K}_2 + \vec{k}_0(i), \\
 \vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} & = 2\vec{K}_2 \cdot \vec{k}'_0.
 \end{aligned}$$

Скалярное равенство (27) расщепляем по степеням $t + \frac{j}{\alpha}$ и $j, \left(t + \frac{j}{\alpha} \right)^2 : \alpha n'_1 + 2n_1\alpha' = 0 \Rightarrow n_1\alpha^2 = C -$ постоянная, $j \left(t + \frac{j}{\alpha} \right) : \alpha' n_1 = 0 -$ противоречие.

Пусть $\alpha' = 0 \Rightarrow \alpha \sim \frac{1}{2}$. Соотношения (22) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \vec{C}_1 & = n_1(i)\vec{e}(j), \\
 \vec{C}_3 & = n_3(i)(\vec{e} \cos \varphi_3 + O\vec{e} \sin \varphi_3), \\
 \vec{C}_2 & = \vec{e}(2jn_3 \cos \varphi_3 + n_2 \cos \varphi_2) + \\
 & + O\vec{e}(-2jn_3 \cos \varphi_3 + n_2 \sin \varphi_2), \\
 \vec{C}_4 & = \vec{e}n_4 \cos \varphi_4 + O\vec{e}(2jn_1 + n_4 \sin \varphi_4), \\
 2\vec{C}_1 - \vec{C}_3 t - \vec{C}_4 & = a_1\vec{e}(j) + a_2O\vec{e}, \\
 2\vec{C}_3 + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2 & = a_3\vec{e} + a_4O\vec{e}, \\
 a_1 & = 2n_1 - tn_3 \cos \varphi_3 - n_4 \cos \varphi_4, \\
 a_2 & = -tn_3 \sin \varphi_3 - 2n_1j - n_4 \sin \varphi_4, \\
 a_3 & = 2n_3 \cos \varphi_3 + tn_1 + 2jn_3 \sin \varphi_3 + n_2 \cos \varphi_2, \\
 a_4 & = 2n_3 \sin \varphi_3 - 2jn_3 \cos \varphi_3 + n_2 \sin \varphi_2, \\
 \vec{C}_3 t + \vec{C}_4 & = b_1\vec{e} + b_2O\vec{e}, \\
 \vec{C}_1 t + \vec{C}_2 & = b_3\vec{e} + b_4O\vec{e}, \\
 b_1 & = tn_3 \cos \varphi_3 + n_4 \cos \varphi_4, \\
 b_2 & = tn_3 \sin \varphi_3 + 2n_1j + n_4 \sin \varphi_4,
 \end{aligned}$$

$$b_3 = tn_1 + 2jn_3 \sin \varphi_3 + n_2 \cos \varphi_2,$$

$$b_4 = -2jn_3 \cos \varphi_3 + n_2 \sin \varphi_2.$$

Соотношения (23) принимают вид:

$$2(\vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1) = a_3 b_{3i} + a_4 b_{4i} - a_1 b_{1i} - a_2 b_{2i},$$

$$(a_1 \vec{P}_{ni} + b_{1i} \vec{P}_{ntt}) \cdot \vec{e} + (a_2 \vec{P}_{ni} + b_{2i} \vec{P}_{ntt}) \cdot O\vec{e} = 0,$$

$$(a_3 \vec{P}_{ni} - b_{3i} \vec{P}_{ntt}) \cdot \vec{e} + (a_4 \vec{P}_{ni} - b_{4i} \vec{P}_{ntt}) \cdot O\vec{e} = 0.$$

Пользуясь формулой $\vec{e}(j) = \vec{e}_0 \sin j + O\vec{e}_0 \cos j$, расщепляем эти соотношения по $\sin j$ и $\cos j$. Получим систему линейных однородных уравнений для величин $\vec{P}_{ni} \cdot \vec{e}_0$, $\vec{P}_{ni} \cdot O\vec{e}_0$, $\vec{P}_{ntt} \cdot \vec{e}_0$, $\vec{P}_{ntt} \cdot O\vec{e}_0$ с матрицей

$$M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_{1i} & b_{2i} \\ -a_2 & a_1 & -b_{2i} & b_{1i} \\ a_3 & a_4 & -b_{3i} & -b_{4i} \\ -a_4 & a_3 & b_{4i} & -b_{3i} \end{vmatrix}.$$

Если определитель Δ матрицы M не равен нулю, то $\vec{P}_{ni} = 0$, $\vec{P}_{ntt} = 0$, $\vec{P}_{nj} = 0 \Rightarrow \vec{P}_n \sim 0$.

Уравнение $a_3 b_{3i} + a_4 b_{4i} - a_1 b_{1i} - a_2 b_{2i} = 2$ расщепляем по t и j : $n_1^2 + n_3^2 = \text{const}$. Первые 4-е уравнения в (26) дают $n_1 n_3 \cos \varphi_3 = \text{const}$, $n_1^2 - n_3^2 = \text{const}$. Значит, величины n_1, n_3, φ_3 — постоянные. Дальнейшее расщепление по t и j приводит к соотношениям:

$$n_1 n_2 \cos \varphi_2 + n_3 n_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) = K_3,$$

$$n_1 n_4 \sin \varphi_4 + n_3 n_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = K_4,$$

$$i = \frac{1}{4} (n_2^2 + n_4^2) - n_1 n_4 \cos \varphi_4 + n_3 n_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Соотношения (26) после расщепления по j интегрируются:

$$n_1 n_4 \cos \varphi_4 + n_3 n_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) = K_1,$$

$$n_1 n_2 \cos \varphi_2 - n_3 n_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) = K_2,$$

$$n_4^2 - n_2^2 = N_0, \quad n_2 n_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) = N_1,$$

$$n_1 n_2 \sin \varphi_2 - n_3 n_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3) = N_3,$$

$$n_2 n_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + n_1 n_4 \sin \varphi_4 = N_4,$$

где K_i, N_i — постоянные. Отсюда следует

$$n_2 \cos \varphi_2 = \text{const}, \quad n_4 \cos \varphi_4 \cos \varphi_3 = \text{const},$$

$$n_4 \sin \varphi_4 = \text{const}, \quad n_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 = \text{const}.$$

Непостоянное решение возможно лишь при $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, $n_1^2 = n_3^2$, $n_2^2 = n_4^2$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_4 = 0 \Rightarrow n_1 \sim -1$, $n_3 \sim 1$, $n_2 = n_4 = m(i)$.

В результате получим решение

$$\vec{x} = (t - 2j)O\vec{e}(j - t) + m(i)\vec{e}(j - t), \quad \frac{1}{2}m^2 + 2m = i,$$

для которого $\Delta = 0$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно решение может быть более общим при $\Delta = 0$. Расщепляем это равенство по t и j , t^4 :

$$\begin{vmatrix} -n_3 \cos \varphi_3 & -n_3 \sin \varphi_3 & (n_3 \cos \varphi_3)' & (n_3 \sin \varphi_3)' \\ n_3 \sin \varphi_3 & -n_3 \cos \varphi_3 & -(n_3 \sin \varphi_3)' & (n_3 \cos \varphi_3)' \\ n_1 & 0 & -n_1' & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & -n_1' \end{vmatrix} = \\ = (n_1 n_3' - n_3 n_1')^2 + n_3^2 \varphi_3'^2 = 0.$$

Такое же равенство получится при расщеплении по j^4 . Если $n_3 = 0$, то выписанные соотношения приводят к противоречию. Если $n_3 \neq 0$, то φ_3, n_1, n_3 — постоянные.

Соотношения (26) после расщепления по j приводятся к уравнениям:

$$(n_2 n_4 \cos(\varphi_2 - \varphi_4))' = 0,$$

$$(n_2^2 - n_4^2)' = 0,$$

$$n_3 \cos \varphi_3 (n_2 \cos \varphi_2)' + n_3 \sin \varphi_3 (n_2 \sin \varphi_2)' + \\ + n_1 (\cos \varphi_4)' = 0,$$

$$n_1 (n_2 \cos \varphi_2)' - n_3 \cos \varphi_3 (n_4 \cos \varphi_4)' - \\ - n_3 \sin \varphi_3 (n_4 \sin \varphi_4)' = 0,$$

$$n_1 (n_2 \sin \varphi_2)' + n_3 \sin \varphi_3 (n_4 \cos \varphi_4)' - \\ - n_3 \cos \varphi_3 (n_4 \sin \varphi_4)' = 0,$$

$$n_3 \sin \varphi_3 (n_2 \cos \varphi_2)' - \\ - n_3 \cos \varphi_3 (n_2 \sin \varphi_2)' - n_1 (n_4 \sin \varphi_4)' = 0.$$

Получили линейную однородную систему для величин $(n_2 \cos \varphi_2)'$, $(n_2 \sin \varphi_2)'$, $(n_4 \cos \varphi_4)'$, $(n_4 \sin \varphi_4)'$. Нулевое решение приводит к противоречию. Нулевой определитель системы дает соотношение $(n_1^2 - n_3^2)^2 + 4n_1^2 n_3^2 \cos^2 \varphi_3 = 0 \Rightarrow n_1^2 = n_3^2 \neq 0$, $\cos \varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, $n_3 \sim 1$, $n_1 \sim -1$.

От системы остается два уравнения:

$$(n_2 \cos \varphi_2)' + (n_4 \sin \varphi_4)' = 0,$$

$$(n_2 \sin \varphi_2)' = (n_4 \cos \varphi_4)'$$

Соотношение $\Delta = 0$ сводится к уравнению $n_2^2 + n_4^2 - 2n_2 n_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) = 0$. Интегрируя уравнения $n_2 \cos \varphi_2 + n_4 \sin \varphi_4 = M_1$, $n_2 \sin \varphi_2 - n_4 \cos \varphi_4 = M_2$, получим $M_1^2 + M_2^2 = 0$, $\cos(\varphi_2 - \varphi_4) = 0$, т.к. $n_2^2 + n_4^2 \neq 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi(i)$, $\varphi_4 = \varphi(i)$, $n_2 = n_4 = m(i)$. Остаются соотношения (23):

$$\vec{P}_{nj} = O\vec{P}_{ntt},$$

$$\vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1 = (t - 2j)(m \sin \varphi)' + 2(m \cos \varphi)' + mm',$$

$$(2 + m \cos \varphi) \vec{P}_{ni} \cdot \vec{e}_0 + (t - 2j + m \sin \varphi) \vec{P}_{ni} \cdot O\vec{e}_0 =$$

$$= (m \cos \varphi)' \vec{P}_{ntt} \cdot \vec{e}_0 + (m \sin \varphi)' \vec{P}_{ntt} \cdot O\vec{e}_0,$$

$$(2 + m \cos \varphi) \vec{P}_{ni} \cdot O\vec{e}_0 - (t - 2j + m \sin \varphi) \vec{P}_{ni} \cdot \vec{e}_0 =$$

$$= (m \cos \varphi)' \vec{P}_{ntt} \cdot O\vec{e}_0 - (m \sin \varphi)' \vec{P}_{ntt} \cdot \vec{e}_0.$$

Два последних равенства представим в векторном виде $(\vec{A} - O\vec{B}) \cdot \vec{e}_0 = 0$, $(\vec{A} - O\vec{B}) \cdot O\vec{e}_0 = 0 \Rightarrow$

$\vec{A} = O\vec{B}$, где $\vec{A} = (2 + m \cos \varphi)\vec{P}_{ni} - (m \cos \varphi)' \vec{P}_{ntt}$, $\vec{B} = (t - 2j + m \sin \varphi)\vec{P}_{ni} - (m \sin \varphi)' \vec{P}_{ntt}$, $\cos(\lambda_1 t) \sin(\lambda_2 t)$, $\cos(\lambda_2 t) \sin(\lambda_1 t)$, $\sin(\lambda_1 t) \sin(\lambda_2 t)$:

$$\begin{aligned} (\vec{C}_2^2 - \vec{C}_1^2)_i &= 4\lambda_1^2 t \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2, \\ (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2)_i + \lambda_1^2 t (\vec{C}_2^2 - \vec{C}_1^2) &= 0, \\ (\vec{C}_4^2 - \vec{C}_3^2)_i &= 4\lambda_2^2 t \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4, \\ (\vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4)_i + \lambda_2^2 t (\vec{C}_4^2 - \vec{C}_3^2) &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^2 \vec{C}_3 (\vec{C}_{1i} + \lambda_1^2 t \vec{C}_2) + \lambda_1^2 \vec{C}_1 (\vec{C}_{3i} + \lambda_2^2 t \vec{C}_4) &= 0, \\ \lambda_2^2 \vec{C}_4 (\vec{C}_{1i} + \lambda_1^2 t \vec{C}_2) + \lambda_1^2 \vec{C}_1 (\vec{C}_{4i} - \lambda_2^2 t \vec{C}_3) &= 0, \\ \lambda_2^2 \vec{C}_3 (\vec{C}_{2i} - \lambda_1^2 t \vec{C}_1) + \lambda_1^2 \vec{C}_2 (\vec{C}_{3i} + \lambda_2^2 t \vec{C}_4) &= 0, \\ \lambda_1^2 \vec{C}_2 (\vec{C}_{4i} - \lambda_2^2 t \vec{C}_3) + \lambda_2^2 \vec{C}_4 (\vec{C}_{2i} - \lambda_1^2 t \vec{C}_1) &= 0, \\ \lambda_1^2 \vec{C}_1 \cdot \vec{P}_{ni} &= (\vec{C}_{1i} + \lambda_1^2 t \vec{C}_2) \cdot \vec{P}_{ntt}, \\ \lambda_1^2 \vec{C}_2 \cdot \vec{P}_{ni} &= (\vec{C}_{2i} - \lambda_1^2 t \vec{C}_1) \cdot \vec{P}_{ntt}, \\ \lambda_2^2 \vec{C}_3 \cdot \vec{P}_{ni} &= (\vec{C}_{3i} + \lambda_2^2 t \vec{C}_4) \cdot \vec{P}_{ntt}, \\ \lambda_2^2 \vec{C}_4 \cdot \vec{P}_{ni} &= (\vec{C}_{4i} - \lambda_2^2 t \vec{C}_3) \cdot \vec{P}_{ntt}. \end{aligned} \tag{30}$$

Остаются равенства

$$\begin{aligned} \vec{P}_{nj} &= O\vec{P}_{ntt}, \quad 4(\vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1) = \\ &= \lambda_1^2 (n_1^2 + n_2^2)_i + \lambda_2^2 (n_3^2 + n_4^2)_i. \end{aligned} \tag{31}$$

Подставляя выражения для $\vec{C}_l, l = 1, 2, 3, 4$ в полученные равенства (29), расщепляем их по переменным j и t :

$$\begin{aligned} (n_2^2 - n_1^2)' &= 0, \quad \lambda_1^2 n_1 n_2 \cos \varphi_2 = 0, \\ (n_4^2 - n_3^2)' &= 0, \quad \lambda_2^2 n_3 n_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) = 0, \\ (n_1 n_2 \cos \varphi_2)' &= 0, \quad \lambda_1^2 (n_2^2 - n_1^2) = 0, \\ (n_3 n_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3))' &= 0, \quad \lambda_2^2 (n_4^2 - n_3^2) = 0, \\ n_1 n_3 (\lambda_2 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_2') &= 0, \quad n_1 n_3 \varphi_3' = 0, \\ \lambda_2^2 n_3 n_1' + \lambda_1^2 n_1 n_3' &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_2 n_3 \sin \varphi_2 + \lambda_1^2 \lambda_2' n_1 n_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_2 n_3 \cos \varphi_2 + \lambda_1^2 \lambda_2' n_1 n_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ n_1 n_4 (\lambda_2 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_2') &= 0, \quad n_1 n_4 \varphi_4' = 0, \\ \lambda_2^2 n_4 n_1' + \lambda_1^2 n_1 n_4' &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_2 n_4 \sin \varphi_2 + \lambda_1^2 \lambda_2' n_1 n_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_2 n_4 \cos \varphi_2 - \lambda_1^2 \lambda_2' n_1 n_3 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) &= 0, \\ n_2 n_3 (\lambda_2 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_2') &= 0, \quad n_2 n_3 (\lambda_1^2 \varphi_3' - \lambda_2^2 \varphi_2') = 0, \\ \lambda_2^2 n_3 n_2' + \lambda_1^2 n_2 n_3' &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_1 n_3 \sin \varphi_2 + \lambda_1^2 \lambda_2' n_2 n_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ \lambda_2^2 \lambda_1' n_1 n_3 \cos \varphi_2 - \lambda_1^2 \lambda_2' n_2 n_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ n_2 n_4 (\lambda_2 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_2') &= 0, \quad n_2 n_4 (\lambda_1^2 \varphi_4' - \lambda_2^2 \varphi_2') = 0, \\ \lambda_1^2 n_2 n_4' + \lambda_2^2 n_4 n_2' &= 0, \\ \lambda_1^2 \lambda_2' n_2 n_3 \sin(\varphi_4 - \varphi_3) - \lambda_2^2 \lambda_1' n_1 n_4 \sin \varphi_2 &= 0, \\ \lambda_1^2 \lambda_2' n_2 n_3 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) + \lambda_2^2 \lambda_1' n_1 n_4 \cos \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Рассмотрим линейные векторные равенства для полинома $\vec{P}_n = t^n \vec{D}_n + \dots + \vec{D}_0(i, j)$. Расщепление по t дает уравнения на коэффициенты полинома $\vec{D}_{nj} = 0, \vec{D}_{n-1,j} = 0, \vec{D}_{n-2,j} = n(n-1)O\vec{D}_n, \dots, \vec{D}_{1j} = 6O\vec{D}_3, \vec{D}_{0j} = 2O\vec{D}_2, t^{n+1} : \vec{D}_{ni} = 0, t^n : \vec{D}_{n-1,i} = 0 \Rightarrow \vec{D}_n = \vec{K}_n, \vec{D}_{n-1} = \vec{K}_{n-1}$ — постоянные, $t^{n-1} : \vec{D}_{n-2,i} = 0 \Rightarrow \vec{D}_{n-2} = n(n-1)jO\vec{K}_n + \vec{K}_{n-2}, t^{n-2} : -O\vec{D}_{n-3,i} = n(n-1)[(m \cos \varphi)' \vec{K}_n - (m \sin \varphi)' O\vec{K}_n], \vec{D}_{n-3,j} = (n-1)(n-2)O\vec{K}_{n-1} \Rightarrow \vec{D}_{n-3} = n(n-1) \times (m \cos \varphi O\vec{K}_n + m \sin \varphi \vec{K}_n) + (n-1)(n-2)jO\vec{K}_{n-1} + \vec{K}_{n-3}, \vec{D}_{n-4} = -\frac{1}{2}j^2 n(n-1)(n-2)(n-3)\vec{K}_n + j(n-2)(n-3)O\vec{K}_{n-2} + \vec{k}_{n-4}(i), jt^{n-3} : (m \cos \varphi)' \vec{K}_n = (m \sin \varphi)' O\vec{K}_n \Rightarrow \vec{K}_n = 0$ при $n > 3$.

Пусть $n = 3, \vec{P}_3 = t^3 \vec{D}_3 + t^2 \vec{D}_2 + t \vec{D}_1 + \vec{D}_0(i, j), \vec{D}_3 = \vec{k}_3(i), \vec{D}_2 = \vec{k}_2(i), \vec{D}_1 = 6jO\vec{k}_3 + \vec{k}_1(i), \vec{D}_0 = 2jO\vec{k}_2 + \vec{k}_0(i)$. Другое линейное уравнение $\vec{A} = O\vec{B}$: $(2 + m \cos \varphi)[t^3 \vec{k}'_3 + t^2 \vec{k}'_2 + t(6jO\vec{k}'_3 + \vec{k}'_1) + 2jO\vec{k}'_2 + \vec{k}'_0] - (t - 2j + m \sin \varphi)[t^3 O\vec{k}'_3 + t^2 O\vec{k}'_2 + t(-6j\vec{k}'_3 + O\vec{k}'_1) - 2j\vec{k}'_2 + O\vec{k}'_0] = (m \cos \varphi)'(6t\vec{k}_3 + 2\vec{k}_2) - (m \sin \varphi)'(6tO\vec{k}_3 + 2O\vec{k}_2)$

расщепляем по t : $t^4 : O\vec{k}'_3 = 0 \Rightarrow \vec{k}_3 = \vec{K}_3, t^3 : O\vec{k}'_2 = 0 \Rightarrow \vec{k}_2 = \vec{K}_2, t^2 : O\vec{k}'_1 = 0 \Rightarrow \vec{k}_1 = \vec{K}_1, t : -O\vec{k}'_0 = 6[(m \cos \varphi)' \vec{K}_3 - (m \sin \varphi)' O\vec{K}_3], t^0 : (2 + m \cos \varphi)\vec{k}'_0 + (2j - m \sin \varphi), O\vec{k}'_0 = 2(m \cos \varphi)' \vec{K}_2 - 2(m \sin \varphi)' O\vec{K}_2, j : O\vec{k}'_0 = 0 \Rightarrow \vec{k}_0 = \vec{K}_0 \Rightarrow \vec{K}_2 = \vec{K}_3 = 0, \vec{P}_1 = t\vec{K}_1 + \vec{K}_0 \sim 0$.

Остается уравнение

$$1 = (t - 2j)(m \sin \varphi)' + 2(m \cos \varphi)' + mm'.$$

Получаем решение

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (t - 2j)O\vec{e}(j - t) + m(i)\vec{e}(j - t - \varphi(i)), \\ i &= 2m \cos \varphi + \frac{1}{2}m^2, \quad m \sin \varphi = C, \end{aligned} \tag{28}$$

где C — постоянная. Если $C = 0$, то $\varphi = 0, i = 2m + \frac{1}{2}m^2$ получается ранее полученное частное решение.

Теорема 3. Решения системы (1) в виде линейно растущих по времени гармоник (19) определены формулами (28) с точностью до преобразований группы G .

8. Бигармонические решения

Подставим представление решения (20) $\vec{x} = \vec{P}_n(t) + \vec{C}_1 \cos(\lambda_1 t) + \vec{C}_2 \sin(\lambda_1 t) + \vec{C}_3 \cos(\lambda_2 t) + \vec{C}_4 \sin(\lambda_2 t), \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1(i) \neq 0, \lambda_2(i) \neq 0$ в систему (1). Линейное векторное равенство расщепляем по гармоникам $\vec{C}_{1j} = -\lambda_1^2 O\vec{C}_1, \vec{C}_{2j} = -\lambda_1^2 O\vec{C}_2, \vec{C}_{3j} = -\lambda_2^2 O\vec{C}_3, \vec{C}_{4j} = -\lambda_2^2 O\vec{C}_4 \Rightarrow \vec{C}_1 \sim n_1(i)\vec{e}(\lambda_1^2 j), \vec{C}_2 = n_2(i)\vec{e}(\lambda_1^2 j - \varphi_2(i)), \vec{C}_3 = n_3(i)\vec{e}(\lambda_2^2 j - \varphi_3(i)), \vec{C}_4 = n_4(i)\vec{e}(\lambda_2^2 j - \varphi_4(i))$. Нелинейное равенство (1) расщепляем по линейно независимым гармоникам $\cos(\lambda_1 t), \sin(\lambda_1 t), \cos(2\lambda_1 t), \sin(2\lambda_1 t), \cos(\lambda_1 t) \cos(\lambda_2 t),$

Если $\lambda_1 \lambda'_2 \neq \lambda_2 \lambda'_1$, то $n_1 n_4 = n_1 n_3 = n_2 n_4 = n_2 n_3 = 0$. Если $n_1 = 0$, то $n_2 \neq 0$, $n_3 = n_4 = 0$ получим гармоническое представление рассмотренное ранее. Значит $\lambda_2 = C \lambda_1$, где постоянная $C \neq 0$ или ± 1 . Если $\lambda'_1 \neq 0$, то из полученных равенств (32) следует $n_2^2 = n_1^2 \neq 0$, $n_4^2 = n_3^2 \neq 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_4 = \varphi_3 + \frac{\pi}{2}$, $\varphi'_3 = \varphi'_4 = 0$, $n_2 = N_1 n_1$, $n_4 = N_2 n_3$, $n_3 n_1^{C^2} = N_0$, $N_2 = C N_1$, $C^2 = 1$ формируется гармоническое представление. Таким образом, λ_1, λ_2 — постоянные, не равные нулю, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Равенства (30) равносильны следующим, если расщепить их по гармоническим функциям:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 n_1 \bar{P}_{ni} &= n'_1 \bar{P}_{ntt}, \\ \lambda_1^2 n_2 \bar{P}_{ni} - n'_2 \bar{P}_{ntt} + n_2 \varphi_2' O \bar{P}_{ntt} &= 0, \\ \lambda_2^2 n_3 \bar{P}_{ni} - n'_3 \bar{P}_{ntt} + n_3 \varphi_3' O \bar{P}_{ntt} &= 0, \\ \lambda_2^2 n_4 \bar{P}_{ni} - n'_4 \bar{P}_{ntt} + n_4 \varphi_4' O \bar{P}_{ntt} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда следуют равенства $\lambda_1^2 n_1 \bar{P}_{ni} \cdot \bar{P}_{ntt} = n'_1 \bar{P}_{ntt}^2$, $\lambda_1^2 n_2 \bar{P}_{ni} \cdot \bar{P}_{ntt} = n'_2 \bar{P}_{ntt}^2$, $\lambda_2^2 n_3 \bar{P}_{ni} \cdot \bar{P}_{ntt} = n'_3 \bar{P}_{ntt}^2$, $\lambda_2^2 n_4 \bar{P}_{ni} \cdot \bar{P}_{ntt} = n'_4 \bar{P}_{ntt}^2$.

Так как $n_1^2 + n_2^2 \neq 0$, $n_3^2 + n_4^2 \neq 0$, то можно предположить $n_1 \neq 0$, $n_3 \neq 0 \Rightarrow \varphi'_3 = 0$, $(n_2 n'_1 - n'_2 n_1) \bar{P}_{ntt}^2 = 0$, $(n_4 n'_3 - n'_4 n_3) \bar{P}_{ntt}^2 = 0$. Если $\bar{P}_{ntt} \neq 0$, то $n_2 = K_1 n_1$, $n_4 = K_2 n_3$, $n_3 = N_3 |n_1|^{-k}$, $k = \lambda_2^2 \lambda_1^{-2}$, $N_3 \neq 0$. Можно считать $\varphi'_2 = 0$, $\varphi'_4 = 0$. Тогда отсюда и из (33) имеем $\bar{P}_{ni} = n'_3 \lambda_2^{-2} n_3^{-1} \bar{P}_{ntt} = -n'_1 \lambda_1^{-2} n_1^{-1} \bar{P}_{ntt} = n'_1 \lambda_1^{-2} n_1^{-1} \bar{P}_{ntt} \Rightarrow n'_1 = 0$, $\bar{P}_{ni} = 0$ и все величины n_i, φ_i — постоянны. Получили противоречивое равенство (31). Значит, должно быть $\bar{P}_{ntt} = 0 \Rightarrow \bar{P}_{ni} = \bar{P}_{nj} = 0 \Rightarrow \bar{P}_n \sim 0$.

Из равенств (31) и (32) следует $n_4 = K_2 n_3$, $n_2 = K_1 n_1$, $K_1, K_2, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — постоянные, $|n_1|^{\lambda_1^2} |n_3|^{\lambda_2^2} \sim 1$, $4i = \lambda_1^2 (1 + K_1^2) n_1^2 + \lambda_2^2 (1 + K_2^2) n_3^2$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \sim 1$.

Теорема 4. Бигармоническое по времени решения системы (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= n_1(i) [\vec{e}(\lambda_1^2 j) \cos(\lambda_1 t) + \\ &+ K_1 \vec{e}(\lambda_1^2 j - \varphi_2) \sin(\lambda_1 t)] + \\ &+ n_3(i) [\vec{e}(\lambda_2^2 j - \varphi_3) \cos(\lambda_2 t) + \\ &+ K_2 \vec{e}(\lambda_2^2 j - \varphi_4) \sin(\lambda_2 t)]. \end{aligned} \quad (34)$$

с точностью до преобразований группы G .

9. Экспоненциально растущие гармоники

Подставим представление решения (21) $\vec{x} = \bar{P}_n(t) + (\vec{C}_1 e^{\mu t} + \vec{C}_2 e^{-\mu t}) \sin(\lambda(i)t) + (\vec{C}_3 e^{\mu t} + \vec{C}_4 e^{-\mu t}) \cos(\lambda(i)t)$ в систему (1). Линейное векторное равенство расщепляем по гармоническим функциям и экспонентам:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nj} &= O \bar{P}_{ntt}, \\ \vec{C}_{1j} &= (\mu^2 - \lambda^2) O \vec{C}_1 - 2\lambda \mu O \vec{C}_3, \\ \vec{C}_{3j} &= (\mu^2 - \lambda^2) O \vec{C}_3 + 2\lambda \mu O \vec{C}_1, \\ \vec{C}_{2j} &= (\mu^2 - \lambda^2) O \vec{C}_2 + 2\lambda \mu O \vec{C}_4, \\ \vec{C}_{4j} &= (\mu^2 - \lambda^2) O \vec{C}_4 - 2\lambda \mu O \vec{C}_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Линейная однородная система для векторов \vec{C}_2, \vec{C}_4 получится из аналогичной системы для \vec{C}_1, \vec{C}_3 заменой индексов $1 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 2$, поэтому достаточно найти общее решение уравнений (35) для \vec{C}_1, \vec{C}_3 . Характеристическое уравнение для решений вида e^{kj} имеет 4 различных собственных числа (две пары комплексно сопряженных) $\kappa_{\pm}^2 = (2\lambda \mu \pm \sqrt{-1}(\mu^2 - \lambda^2))^2$.

Вычисляя собственные функции, получим общее решение

$$\begin{aligned} \vec{C}_1 &= (\vec{C}_{1,1} e^{2\lambda \mu j} + \vec{C}_{1,2} e^{-2\lambda \mu j}) \cos(\mu^2 - \lambda^2)j + \\ &+ O(\vec{C}_{1,1} e^{2\lambda \mu j} + \vec{C}_{1,2} e^{-2\lambda \mu j}) \sin(\mu^2 - \lambda^2)j, \\ \vec{C}_3 &= O(\vec{C}_{1,1} e^{2\lambda \mu j} - \vec{C}_{1,2} e^{-2\lambda \mu j}) \cos(\mu^2 - \lambda^2)j - \\ &- (\vec{C}_{1,1} e^{2\lambda \mu j} - \vec{C}_{1,2} e^{-2\lambda \mu j}) \sin(\mu^2 - \lambda^2)j, \\ \vec{C}_2 &= O(\vec{C}_{4,1} e^{2\lambda \mu j} - \vec{C}_{4,2} e^{-2\lambda \mu j}) \cos(\mu^2 - \lambda^2)j - \\ &- (\vec{C}_{4,1} e^{2\lambda \mu j} - \vec{C}_{4,2} e^{-2\lambda \mu j}) \sin(\mu^2 - \lambda^2)j, \\ \vec{C}_4 &= (\vec{C}_{4,1} e^{2\lambda \mu j} + \vec{C}_{4,2} e^{-2\lambda \mu j}) \cos(\mu^2 - \lambda^2)j + \\ &+ O(\vec{C}_{4,1} e^{2\lambda \mu j} + \vec{C}_{4,2} e^{-2\lambda \mu j}) \sin(\mu^2 - \lambda^2)j. \end{aligned}$$

Здесь вектор-функции $\vec{C}_{1,1}, \vec{C}_{1,2}, \vec{C}_{4,1}, \vec{C}_{4,2}$ зависят от i . Вычисляя производные \vec{x}_i, \vec{x}_{it} , подставим их в скалярное уравнение (1). Расщепляем уравнение по линейно независимым гармоническим функциям $\sin(\lambda t), \cos(\lambda t), \sin(2\lambda t), \cos(2\lambda t)$, а затем по $e^{2\mu t}, e^{-2\mu t}$ и t . Получим основные равенства для коэффициентов $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3, \vec{C}_4$:

$$\begin{aligned} &(\vec{C}_1^2 - \vec{C}_3^2)(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda \mu \mu_i) + \\ &+ 2\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3(\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) - 2\lambda \mu \lambda_i) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3)_i + \lambda \mu (\vec{C}_1^2 - \vec{C}_3^2)_i = 0, \\ &(\vec{C}_2^2 - \vec{C}_4^2)(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda \mu \mu_i) - \\ &- 2\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4(\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) - 2\lambda \mu \lambda_i) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4)_i + \lambda \mu (\vec{C}_2^2 - \vec{C}_4^2)_i = 0, \\ &(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) - 2\lambda \mu \mu_i)(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 + \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3)_i + \\ &+ 2\lambda \mu (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4)_i + \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_3 - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4 = 0, \\ &(\vec{C}_3^2 - \vec{C}_1^2)(\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) - 2\lambda \mu \lambda_i) + \\ &+ 2\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda \mu \mu_i) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_3^2 - \vec{C}_1^2)_i + 4\lambda \mu (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3)_i = 0, \\ &(\vec{C}_4^2 - \vec{C}_2^2)(2\lambda \mu \lambda_i - \mu_i(\mu^2 - \lambda^2)) + \\ &+ 2\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda \mu \mu_i) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_4^2 - \vec{C}_2^2)_i - 4\lambda \mu (\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4)_i = 0, \\ &(\lambda_i(\mu^2 - \lambda^2) - 2\lambda \mu \mu_i)(\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3 - \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4) = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4 - \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2)_i + \\ &+ 2\lambda \mu (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 - \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_1 + \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_2 - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_1^2 + \vec{C}_3^2)_i + 4\lambda\mu(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{3i} - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{1i}) = 0, \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_2^2 + \vec{C}_4^2)_i + 4\lambda\mu(\vec{C}_4 \cdot \vec{C}_{2i} - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_{4i}) = 0, \\
 &(\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda\mu\lambda_i)(\vec{C}_1^2 + \vec{C}_3^2) = 0, \\
 &(\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda\mu\lambda_i)(\vec{C}_2^2 + \vec{C}_4^2) = 0; \\
 &\vec{P}_{ni} \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_1 - 2\lambda\mu\vec{C}_3) + \\
 &+ \vec{P}_{ntt} \cdot (\vec{C}_{1i} + \mu_i t \vec{C}_1 - \lambda_i t \vec{C}_3) = 0, \\
 &\vec{P}_{ni} \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_3 + 2\lambda\mu\vec{C}_1) + \\
 &+ \vec{P}_{ntt} \cdot (\vec{C}_{3i} + \mu_i t \vec{C}_3 + \lambda_i t \vec{C}_1) = 0, \\
 &\vec{P}_{ni} \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_2 + 2\lambda\mu\vec{C}_4) + \\
 &+ \vec{P}_{ntt} \cdot (\vec{C}_{2i} - \mu_i t \vec{C}_2 - \lambda_i t \vec{C}_4) = 0, \\
 &\vec{P}_{ni} \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_4 - 2\lambda\mu\vec{C}_2) + \\
 &+ \vec{P}_{ntt} \cdot (\vec{C}_{4i} - \mu_i t \vec{C}_4 + \lambda_i t \vec{C}_2) = 0; \\
 &-2(\vec{P}_{ntt} \cdot \vec{P}_{ni} + 1) = \\
 &= (\vec{C}_{1i} + \mu_i t \vec{C}_1 - \lambda_i t \vec{C}_3) \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_2 + 2\lambda\mu\vec{C}_4) + \\
 &+ (\vec{C}_{2i} - \mu_i t \vec{C}_2 - \lambda_i t \vec{C}_4) \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_1 - 2\lambda\mu\vec{C}_3) + \\
 &+ (\vec{C}_{3i} + \mu_i t \vec{C}_3 + \lambda_i t \vec{C}_1) \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_4 - 2\lambda\mu\vec{C}_2) + \\
 &+ (\vec{C}_{4i} - \mu_i t \vec{C}_4 + \lambda_i t \vec{C}_2) \cdot ((\mu^2 - \lambda^2)\vec{C}_3 + 2\lambda\mu\vec{C}_1).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство $\mu_i(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda\mu\lambda_i = 0 \Rightarrow \mu^2 + \lambda^2 = K\mu$, $K \neq 0$ — постоянная, если $\mu_i^2 + \lambda_i^2 \neq 0$. В этом случае из основных равенств следует $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_3 = 0$, $\vec{C}_1^2 = \vec{C}_3^2$, $\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_4 = 0$, $\vec{C}_2^2 = \vec{C}_4^2 \Rightarrow \vec{C}_3 = O\vec{C}_1$, $\vec{C}_4 = -O\vec{C}_2$ и $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4$, $\vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3 + \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 = 0 \Rightarrow \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = 0$, $\vec{C}_2 \cdot O\vec{C}_1 = 0 \Rightarrow \vec{C}_2 = \vec{C}_4 = 0$, $\vec{C}_{1,2} = 0$, $\vec{C}_1 = e^{2\lambda\mu j} c(i) \vec{e}(\varphi - (\mu^2 - \lambda^2)j)$.

Из основных равенств следует $(\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_1^2)_i = 4\lambda\mu\vec{C}_{1i} \cdot O\vec{C}_1$. Подстановка уточненного представления для \vec{C}_1 , расщепление по j дает соотношения: $c'(\mu^2 - \lambda^2) + 2\lambda\mu c\varphi' = 0$, $(\mu^2 - \lambda^2)(\mu\lambda)' = \mu\lambda(\mu^2 - \lambda^2)' \Rightarrow \mu^2 - \lambda^2 = N\mu\lambda$, N — постоянная, $\mu^2 + \lambda^2 = K\mu \Rightarrow \mu, \lambda$ — постоянные. Противоречие. Значит в основных равенствах надо считать $\mu_i = \lambda_i = 0$. Представим коэффициенты решения в виде: $\vec{C}_{1,1} = c_{1,1}\vec{e}(\varphi_{1,1}(i))$, $\vec{C}_{1,2} = c_{1,2}\vec{e}(\varphi_{1,2}(i))$, $\vec{C}_{4,1} = c_{4,1}\vec{e}(\varphi_{4,1}(i))$, $\vec{C}_{4,2} = c_{4,2}\vec{e}(\varphi_{4,2}(i)) \Rightarrow \vec{C}_1 = e^{2\lambda\mu j} c_{1,1}\vec{e}_{1,1} + e^{-2\lambda\mu j} c_{1,2}\vec{e}_{1,2}$, $\vec{C}_3 = e^{2\lambda\mu j} c_{1,1} O\vec{e}_{1,1} - e^{-2\lambda\mu j} c_{1,2} O\vec{e}_{1,2}$, $\vec{C}_4 = e^{2\lambda\mu j} c_{4,1}\vec{e}_{4,1} + e^{-2\lambda\mu j} c_{4,2}\vec{e}_{4,2}$, $\vec{C}_2 = e^{2\lambda\mu j} c_{4,1} O\vec{e}_{4,1} - e^{-2\lambda\mu j} c_{4,2} O\vec{e}_{4,2}$, где $\vec{e}_{1,1} = \vec{e}(\varphi_{1,1} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$, $\vec{e}_{1,2} = \vec{e}(\varphi_{1,2} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$, $\vec{e}_{4,1} = \vec{e}(\varphi_{4,1} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$, $\vec{e}_{4,2} = \vec{e}(\varphi_{4,2} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$.

Подстановка в основные равенства и расщепление по j приводит к равенствам:

$$\begin{aligned}
 &(c_{1,1}c_{1,2})' = 0, \quad c_{1,1}c_{1,2}(\varphi'_{1,1} - \varphi'_{1,2}) = 0, \\
 &(c_{4,1}c_{4,2})' = 0, \quad c_{4,1}c_{4,2}(\varphi'_{4,1} - \varphi'_{4,2}) = 0; \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)c'_{1,1} + 2\lambda\mu c_{1,1}\varphi'_{1,1} = 0, \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)c'_{1,2} = 2\lambda\mu c_{1,2}\varphi'_{1,2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(\mu^2 - \lambda^2)c'_{4,1} + 2\lambda\mu c_{4,1}\varphi'_{4,1} = 0, \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)c'_{4,2} = 2\lambda\mu c_{4,2}\varphi'_{4,2}, \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)c_{1,1}c_{4,1}(\varphi'_{1,1} - \varphi'_{4,1}) + 2\lambda\mu(c_{1,1}c'_{4,1} - c_{4,1}c'_{1,1}) = 0, \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)c_{1,2}c_{4,2}(\varphi'_{1,2} - \varphi'_{4,2}) + 2\lambda\mu(c_{4,2}c'_{1,2} - c_{1,2}c'_{4,2}) = 0; \\
 &(\mu^2 - \lambda^2)\vec{P}_{ni} + \varphi' O\vec{P}_{ntt} = 0, \quad \varphi = \varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{4,1}, \varphi_{4,2}; \\
 &0 = \vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} + 1 + (\mu^2 - \lambda^2) \\
 &(-c_{1,1}c_{4,2} \sin(\varphi_{4,2} - \varphi_{1,1}) + c_{1,2}c_{4,1} \sin(\varphi_{4,1} - \varphi_{4,2}))_i + \\
 &+ 2\lambda\mu(c_{1,1}c_{4,2} \cos(\varphi_{4,2} - \varphi_{1,1}) + c_{1,2}c_{4,1} \cos(\varphi_{4,1} - \varphi_{4,2}))_i.
 \end{aligned}$$

Если $\mu^2 \neq \lambda^2$, $\kappa = 2\lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2)^{-1}$, то $c_{1,1} = K_{1,1}e^{-\kappa\varphi_{1,1}}$, $c_{1,2} = K_{1,2}e^{\kappa\varphi_{1,2}}$, $c_{4,1} = K_{4,1}e^{-\kappa\varphi_{4,1}}$, $c_{4,2} = K_{4,2}e^{\kappa\varphi_{4,2}}$, $K_{1,1}K_{1,2}(\varphi'_{1,2} - \varphi'_{1,1}) = 0$, $K_{1,1}K_{4,1}(\varphi'_{4,1} - \varphi'_{1,1}) = 0$, $K_{1,2}K_{4,2}(\varphi'_{4,2} - \varphi'_{1,2}) = 0$, $K_{4,1}K_{4,2}(\varphi'_{4,2} - \varphi'_{4,1}) = 0$.

Если все постоянные $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{4,1}$, $K_{4,2}$ не равны нулю, то все значения углов одинаковые $\varphi_{1,1} = \varphi_{1,2} = \varphi_{4,1} = \varphi_{4,2} = \varphi(i) \sim 0 \Rightarrow \vec{C}_{li} = 0$, $l = 1, 2, 3, 4$, $\vec{x}_i = \vec{P}_{ni} = 0$ противоречие.

Различные углы возможны лишь для двух эквивалентных случаев $K_{1,1} = K_{4,2} = 0$, $\varphi_{1,2} \neq \varphi_{4,1}$, $K_{1,2} \neq 0$, $K_{4,1} \neq 0$ и $K_{1,2} = K_{4,1} = 0$, $\varphi_{1,1} \neq \varphi_{1,2}$, $K_{1,1} \neq 0$, $K_{4,2} \neq 0$.

Из основных равенств следует в первом случае

$$(\mu^2 - \lambda^2)\vec{P}_{ni} + \varphi'_{1,2} O\vec{P}_{ntt} = 0,$$

$$(\mu^2 - \lambda^2)\vec{P}_{ni} + \varphi'_{4,1} O\vec{P}_{ntt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{ni} = \vec{P}_{ntt} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 -2 &= (\mu^2 - \lambda^2)(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 + \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_4)_i + \\
 &+ 2\lambda\mu(\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3)_i,
 \end{aligned}$$

где $\vec{C}_1 = K_{1,2}e^{-2\lambda\mu j + \kappa\varphi_{1,2}}\vec{e}_{1,2}$, $\vec{C}_3 = -O\vec{C}_1$, $\vec{e}_{1,2} = \vec{e}(\varphi_{1,2} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$, $\vec{C}_2 = O\vec{C}_4$, $\vec{C}_4 = K_{4,1}e^{2\lambda\mu j - \kappa\varphi_{4,1}}\vec{e}_{4,1}$, $\vec{e}_{4,1} = \vec{e}(\varphi_{4,1} - (\mu^2 - \lambda^2)j)$.

Решение принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= K_{1,2}e^{-2\lambda\mu j + \kappa\varphi_{1,2} + \mu t} \vec{e}(\varphi_{1,2} - (\mu^2 - \lambda^2)j - \lambda t + \frac{\pi}{2}) + \\
 &+ K_{4,1}e^{2\lambda\mu j - \kappa\varphi_{4,1} - \mu t} \vec{e}(\varphi_{4,1} - (\mu^2 - \lambda^2)j - \lambda t).
 \end{aligned}$$

С помощью преобразований эквивалентности из группы G оно приводится к виду:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= e^{-\sigma \sin 2\theta} [e^{-j \sin 2\theta - t \sin \theta} \vec{e}(t \cos \theta + \\
 &+ (j + \sigma) \cos 2\theta) + \\
 &+ e^{j \sin 2\theta + t \sin \theta} \vec{e}(t \cos \theta + (j - \sigma) \cos 2\theta)], \quad (36) \\
 &- e^{2\sigma \sin 2\theta} = 2\sigma'(i) \sin(2\sigma \cos 2\theta + 4\theta),
 \end{aligned}$$

где $\theta \neq 0$, $\frac{\pi}{4}$ — постоянная; $\sigma(i)$ — функция переменной i [9].

Рассмотрим случай

$$\mu^2 = \lambda^2, \quad \mu \sim 1, \quad \lambda \sim 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= \vec{P}_n(t) + (\vec{C}_1 \sin t + \vec{C}_3 \cos t)e^t + (\vec{C}_2 \sin t + \vec{C}_4 \cos t)e^{-t}, \\
 \vec{C}_1 &= \vec{C}_{1,1}e^{2j} + \vec{C}_{1,2}e^{-2j},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{C}_3 &= O\vec{C}_{1,1}e^{2j} - O\vec{C}_{1,2}e^{-2j}, \\ \vec{C}_2 &= O\vec{C}_{4,1}e^{2j} - O\vec{C}_{4,2}e^{-2j}, \\ \vec{C}_4 &= \vec{C}_{4,1}e^{2j} + \vec{C}_{4,2}e^{-2j}. \end{aligned}$$

Основные равенства принимают вид:

$$\begin{aligned} \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{1i} &= \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{3i}, \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{3i} = 0, \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{1i} = 0; \\ \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_{4i} &= \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_{2i}, \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_{4i} = 0, \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_{2i} = 0, \\ \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{2i} - \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_{1i} + \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{4i} - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_{3i} &= 0, \\ \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_{2i} - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_{1i} + \vec{C}_4 \cdot \vec{C}_{3i} - \vec{C}_3 \cdot \vec{C}_{4i} &= 0, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} 2\vec{C}_1 \cdot \vec{P}_{ni} + \vec{C}_{3i} \cdot \vec{P}_{ntt}, 2\vec{C}_3 \cdot \vec{P}_{ni} &= \vec{C}_{1i} \cdot \vec{P}_{ntt}, \\ 2\vec{C}_2 \cdot \vec{P}_{ni} = \vec{C}_{4i} \cdot \vec{P}_{ntt}, 2\vec{C}_4 \cdot \vec{P}_{ni} + \vec{C}_{2i} \cdot \vec{P}_{ntt} &= 0, \\ -1 - \vec{P}_{ni} \cdot \vec{P}_{ntt} = (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_4 - \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_3)_i &= \\ = 2(\vec{C}_{1,1} \cdot \vec{C}_{4,2} + \vec{C}_{1,2} \cdot \vec{C}_{4,1})'. \end{aligned} \tag{38}$$

Расщепление равенств (37) по j приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} \vec{C}'_{1,1} \cdot O\vec{C}_{1,1} = 0, \vec{C}'_{1,2} \cdot O\vec{C}_{1,2} = 0, \\ \vec{C}'_{1,1} \cdot O\vec{C}_{1,2} = \vec{C}'_{1,2} \cdot O\vec{C}_{1,1}, \\ (\vec{C}_{1,1} \cdot \vec{C}_{1,2})' = 0, \vec{C}'_{4,1} \cdot O\vec{C}_{4,1} = 0, \\ \vec{C}'_{4,2} \cdot \vec{C}_{4,2} = 0, \vec{C}'_{4,1} \cdot O\vec{C}_{4,2} = \vec{C}'_{4,2} \cdot O\vec{C}_{4,1}, \\ (\vec{C}_{4,1} \cdot \vec{C}_{4,2})' = 0, \vec{C}'_{1,1} \cdot \vec{C}_{4,1} = \vec{C}'_{4,1} \cdot \vec{C}_{1,1}, \\ \vec{C}'_{4,1} \cdot O\vec{C}_{1,1} + \vec{C}'_{1,1} \cdot O\vec{C}_{4,1} = 0, \\ \vec{C}'_{1,2} \cdot \vec{C}_{4,2} = \vec{C}'_{4,2} \cdot \vec{C}_{1,2}, \\ \vec{C}'_{4,2} \cdot O\vec{C}_{1,2} + \vec{C}'_{1,2} \cdot O\vec{C}_{4,2} = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Один из коэффициентов не равен нулю, например, $\vec{C}_{1,1} = c(i)\vec{e}(\varphi(i)) \neq 0$. Тогда из (39) следуют равенства $\varphi = \varphi_0$ — постоянная, $\vec{C}_{1,2} = c_2\vec{e}(\varphi_2)$, $K\varphi'_2 = 0$, $cc_2 = K$ — постоянная; $\vec{C}_{4,1} = b_1(i)\vec{e}(\varphi_3(i))$, $b_1\varphi'_3 = 0$; $\vec{C}_{4,2} = b(i)\vec{e}(\varphi_4(i))$, $b\varphi'_4 = 0$, $(b_1b)' = 0$; $c'b_1 = cb'_1 \Rightarrow c^{-1}b_1 = B_1$ — постоянная, $K(cb)' = 0$, $B_1(cb)' = 0$, $B_1\varphi'_3 = 0$.

Равенства (38) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \vec{P}_{ni} = \frac{1}{2}c^{-1}c'O\vec{P}_{ntt}, (bc)'O\vec{P}_{ntt} = 0, \\ -\frac{1}{2}i = cb \cos(\varphi_4 - \varphi_0) + KB_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Если $K \neq 0$, то $cb = B_2$ — постоянная, $B_1\varphi'_3 = 0$, $B_2\varphi'_4 = 0$, $\varphi'_2 = 0$ и равенство $-\frac{1}{2}i = B_2 \cos(\varphi_4 - \varphi_0) + KB_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)$ противоречиво для любых значений B_1 и B_2 . Значит, $K = 0$, $-\frac{1}{2}i = cb \cos(\varphi_4 - \varphi_0) \neq 0$, $\varphi'_4 = 0$, $cb \neq \text{const} \Rightarrow B_1 = 0$, $\vec{P}_{ntt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{nj} = \vec{P}_{ni} = 0 \Rightarrow \vec{P}_n \sim 0$, $\vec{C}_1 = c(i)e^{2j}\vec{e}(\varphi_0)$, $\vec{C}_3 = O\vec{C}_1$, $\vec{C}_4 = b(i)e^{-2j}\vec{e}(\varphi_4)$, $\vec{C}_2 = -O\vec{C}_4$.

Получаем решение

$$\begin{aligned} \vec{x} = ce^{t+2j}O\vec{e}(t + \varphi_0) + be^{-t-2j}O\vec{e}(t + \varphi_4), \\ 2bc \cos(\varphi_0 - \varphi_4) + i = 0, \end{aligned}$$

которое преобразованиями из группы G подобно следующему

$$\vec{x} \sim e^{t+2j}\vec{e}(t+\theta) + b(i)e^{-t-2j}\vec{e}(t), 2b \sin \theta = i, \tag{40}$$

где θ — постоянная, не равная нулю.

Теорема 5. Решения системы (1) в виде экспоненциально растущих по времени гармоник (21) определены формулами (36) и (40) с точностью до преобразований группы G .

10. О возможности существования решений для вспомогательных функций общего вида

Для случая 3^0 решений цепочки уравнений для вспомогательных функций уравнение (11) при $k = 1$ принимает вид:

$$j\vec{x}^{(4)} = \frac{1}{2}\tilde{t}O\vec{x}'''' + C(i)\vec{x}'''. \tag{41}$$

При $k = 2$ уравнение (11) является продифференцированным по t уравнением (41). Уравнение (41) интегрируем по t дважды и по j в силу (1):

$$\begin{aligned} 2j\vec{x}_j + \tilde{t}\vec{x}' - 2\vec{x} - 2CO\vec{x} = \\ = 2\tilde{t}O\vec{\alpha}(i, j) + 2O\vec{\beta}(i, j) = 2\vec{\gamma}_0(i, \tilde{t}) \Rightarrow \vec{\alpha}_j = \vec{\beta}_j = 0. \end{aligned}$$

Общее решение представляется в виде $\vec{x} = \vec{y} + \tilde{t}\vec{\gamma}(i) + \vec{\delta}(i)$, где \vec{y} удовлетворяет однородному уравнению. Замена переменных $\vec{y}(i, j, \tilde{t}) = \vec{y}(i, \tilde{t}, s)$, $s = \tilde{t}^{-2}j$ приводит к системе из обыкновенных дифференциальных уравнений $\tilde{t}\vec{y}'_i = 2\vec{y} + 2CO\vec{y}$. Общее решение имеет вид:

$$\vec{y} = \tilde{t}^2(\vec{C}_1(i, s) \sin(2C \ln |\tilde{t}|) - O\vec{C}_1(i, s) \cos(2C \ln |\tilde{t}|)).$$

Подстановка общего решения \vec{x} в векторное уравнение (1), расщепление по гармоническим функциям дает уравнение: $\vec{C}_{1s} = 2O\vec{A}$, $\vec{A} = (1 - 2C^2)\vec{C}_1 + 3CO\vec{C}_1 - s\vec{C}_{1s} - 4CsO\vec{C}_{1s} + 2s^2\vec{C}_{1ss}$. Скалярное уравнение (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} 1 + \vec{C}_{1s} \cdot O\vec{B} = (\tilde{t}\vec{\gamma}' + \vec{\delta}' - \vec{\gamma}Q') \times \\ \times (O\vec{C}_{1s} \sin(2C \ln |\tilde{t}|) + \vec{C}_{1s} \cos(2C \ln |\tilde{t}|)), \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \tilde{t}^2(\vec{C}_{1i} + 2C' \ln |\tilde{t}|O\vec{C}_1) - 2\tilde{t}Q'(\vec{C}_1 + CO\vec{C}_1 - s\vec{C}_{1s}).$$

Расщепление по t приводит к противоречивому равенству $1 = \tilde{t}^2\vec{C}_{1i} \cdot \vec{C}_{1s}$.

Новый тип продолжения $p_0 = -1$, $q_0(i)$, $p_k = q_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$ задает равенства

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}'' = -1 \Rightarrow \vec{x}'_i \cdot \vec{x}'' + \vec{x}_i \cdot \vec{x}'''' = 0,$$

$$\vec{x}_i \cdot O\vec{x}'''' - \vec{x}'_i \cdot O\vec{x}''' = q_0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \bar{x}''/2 \bar{x}_i' + q_0 O\bar{x}'' - (\bar{x}_i \cdot O\bar{x}'') O\bar{x}''' &= \bar{x}''', \\ \bar{x}_i^{(k)} \cdot \bar{x}^{(k+2)} = 0 \Rightarrow \bar{x}_i^{(k+1)} \cdot \bar{x}^{(k+2)} &= -\bar{x}_i^{(k)} \cdot \bar{x}^{(k+3)}, \\ \bar{x}_i^{(k+1)} \cdot O\bar{x}^{(k+2)} &= \bar{x}_i^{(k)} \cdot O\bar{x}^{(k+3)} \Rightarrow \\ (\bar{x}^{(k+2)})^2 \bar{x}_i^{(k+1)} &= (\bar{x}_i^{(k)} \cdot O\bar{x}^{(k+2)}) O\bar{x}^{(k+3)}. \end{aligned}$$

При $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned} (\bar{x}''')^2 \bar{x}_i'' &= (\bar{x}_i' \cdot O\bar{x}''') O\bar{x}^{(4)} \Rightarrow \\ (\bar{x}''')^2 \bar{x}_i''' + 2(\bar{x}''') \cdot O\bar{x}^{(4)} \bar{x}_i'' &= \\ = (\bar{x}_i' \cdot O\bar{x}''') O\bar{x}^{(5)} + (\bar{x}_i' \cdot O\bar{x}''')' O\bar{x}^{(4)}. \end{aligned}$$

При $k = 2$ имеем $(\bar{x}^{(4)})^2 \bar{x}_i''' = (\bar{x}_i'' O\bar{x}^{(4)}) O\bar{x}^{(5)} = (\bar{x}''')^{-2} (\bar{x}^{(4)})^2 (\bar{x}_i' O\bar{x}''') O\bar{x}^{(5)}$. Отсюда получим

$$\begin{aligned} ((\bar{x}''')^2)' (\bar{x}_i' \cdot O\bar{x}''') &= (\bar{x}''')^2 (\bar{x}_i' \cdot O\bar{x}''')' \Rightarrow \\ \bar{x}_i' \cdot O\bar{x}'''' &= \alpha(i, j) (\bar{x}''')^2 \Rightarrow \bar{x}_i' = \alpha(i, j) O\bar{x}'''' \Rightarrow \\ \bar{x}_i &= \alpha \bar{x}_j + \vec{\beta}(i, j), \vec{\beta} \cdot \bar{x}'' = -1, \vec{\beta} \cdot O\bar{x}'''' = q_0 \Rightarrow \\ \vec{\beta} \cdot O\bar{x}'' &= q_0 t + \gamma(i, j) = \vec{\beta} \cdot \bar{x}_j, \vec{\beta} \cdot O\bar{x}_j = 1 \Rightarrow \\ \vec{\beta}^2 \bar{x}_j &= -O\vec{\beta} + (q_0 t + \gamma) \vec{\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда следует $\bar{x}_i'' = \bar{x}_j'' = 0 \Rightarrow \bar{x}^{(4)} = 0$ полиномиальное представление решения, рассмотренное ранее.

Аналогичное заключение можно сделать для любого типа продолжения нового типа. Итак, получились решения (13), (14), (16), (17), (28), (34), (36), (40).

11. Движения газа полученных решений

1⁰. Полиномиальное решение (13) задает движение в стационарной системе координат $O\vec{e}_0, \vec{e}_0: x = t\alpha(i) + 2j, y = t^2 - \frac{1}{2}i$. В начальный момент времени $t = 0$ определяются зависимости j и $i: x(0) = \xi = 2j, y(0) = \eta = -\frac{1}{2}i$. Решение представляем в виде $x = t\alpha(-2\eta) + \xi, y = t^2 + \eta, i = 2t^2 - 2y$. Мировые линии не пересекаются. Траектории частиц — параболы. Получаем разворот потока вдоль оси y .

2⁰. Полиномиальное решение (14) в координатах таково $x = t^2 + 6tj - \frac{1}{2}i, y = t^3 - 2j$. При $t = 0$ определяем зависимости $i = -2\xi, j = -\frac{1}{2}\eta, x = t^2 - 3t\eta + \xi, y = t^3 + \eta, i = 6t^4 + 2t^2 - 2x - 6ty$. Траектория частицы $y = y(x)$, заданной начальным положением $\vec{\xi}$, имеет точку минимума $x_m = \xi - \frac{9}{4}\eta^2, y_m = \frac{27}{8}\eta^3 + \eta$ и две точки перегиба при $t = 0, \vec{x}_0 = \vec{\xi}$ и при $t = 3\eta, x_1 = \xi, y_1 = \eta(27\eta^2 + 1)$, в которых меняется выпуклость. Получаем разворот потока вдоль оси x .

3⁰. Гармоническое решение (16) $\vec{x} = C(i)\vec{e}(\alpha^2 j - t\alpha(i)), \alpha^2 C C' = 1$ при $t = 0$ определяет зависимости i, j от $\vec{\xi} = C(i)\vec{e}(\alpha^2 j)$. Движение частицы с радиус-вектором $\vec{\xi}$ происходит по окружности $|\vec{x}| = |\vec{\xi}| = C$ с постоянной

скоростью $-\alpha(i)$, согласованной с радиусом окружности: $\arg \vec{x} = \arg \vec{\xi} - t\alpha$.

4⁰. Гармоническое решение (17) $\vec{x} = (t^2 + 2 \ln |C|)\vec{e}_0 + 2jO\vec{e}_0 + C(i)\vec{e}(j - t), i = \frac{1}{2}C^2 - 4 \ln |C|$ при $t = 0$ определяет зависимости j, C от $\vec{\xi}: \vec{\xi} = (2 \ln |C| + C \cos j)\vec{e}_0 + (2j + C \cos j)O\vec{e}_0$. Движение частицы $\vec{x} = \vec{\xi} + t^2\vec{e}_0 + C(\vec{e}(j - t) - \vec{e}(j))$, $\vec{x}_t(0) = CO\vec{e}(j)$ определяется начальным вектором $\vec{\xi}$, вектором $t^2\vec{e}_0$ на прямой l , перпендикулярной вектору $O\vec{e}_0$ из точки $\vec{\xi}$, движением с постоянной скоростью по окружности m радиуса C с центром сдвинутым на вектор $-C\vec{e}(j)$ от точки $\vec{\xi}$. Траектория колеблется возле прямой l . Отстоит от l на величину не более, чем $C(1 - \cos j)$ с одной стороны и на величину $C(1 + \cos j)$ с другой стороны. Пересекает l при t_1 , когда l пересекает m . Две ветви траектории при $t > 0$ и $t < 0$ гладко примыкают в начальной точке. Происходит отражение сгущающихся частиц от среды с изменяющимся термодинамическим потенциалом $i(\xi, \eta)$.

5⁰. Линейно растущие гармоники (28) $\vec{x} = (t - 2j)O\vec{e}(j - t) + m(i)\vec{e}(j - t - \varphi(i)), i = 2m \cos \varphi + \frac{1}{2}m^2, m \sin \varphi = C = \text{const}$ при $t = 0$ определяют зависимости j, m и φ от начальной точки $\vec{\xi} = \vec{x}(0) = -2O\vec{e}(j) + m\vec{e}(j - \varphi)$. Закон движения представим в виде $\vec{x} = \Lambda(-t)(\vec{\xi} + tO\vec{e}(j))$, $\vec{x}_t(0) = O\vec{\xi} + O\vec{e}(j)$. Здесь вектор $\vec{\xi} + tO\vec{e}(j)$ на прямой поворачивается на угол $-t$ вокруг начала. Частица двигается по линейно растущей спирали вокруг начальной точки. Происходит разворот сгущающихся частиц в среде $i(\xi, \eta)$. Начало $\vec{x} = \vec{\xi} = 0$ стоит на месте.

6⁰. Бигармоническое решение (34) рассмотрим при $K_1 = K_2 = 0: \vec{x} = n\vec{e}(\lambda^2 j) \cos(\lambda t) + n^{-\lambda-2}\vec{e}(j - \varphi) \cos t, 4i = \lambda^2 n^2 + n^{-2\lambda-2}$, где λ, φ — постоянные. При $t = 0$ определяются зависимости n, j от $\vec{\xi} = n\vec{e}(\lambda^2 j) + n^{-\lambda-2}\vec{e}(j - \varphi)$. Движение частицы $\vec{x} = \vec{\xi} \cos t + n\vec{e}(\lambda^2 j)(\cos(\lambda t) - \cos t)$ имеет ограниченную траекторию $|\vec{x}| < |\vec{\xi}| + 2n$. В координатной системе $O\vec{e}(\lambda^2 j), \vec{e}(\lambda^2 j)$ имеем движение частицы $\tilde{x} = \tilde{\xi} \cos t, \tilde{y} = n \cos(\lambda t) + (\tilde{\eta} - n) \cos t$ по траектории $\tilde{y} = \tilde{x} \frac{\tilde{\eta} - n}{\tilde{\xi}} + n \cos\left(\lambda \arccos \frac{\tilde{x}}{\tilde{\xi}}\right)$, на которой должны быть две точки остановки при $t = \pi k, k = 0, 1, 2, \dots (\tilde{x}_t = 0)$. Отсюда следует $\lambda = 2, 3, \dots$ При $\lambda = 2$ из начальной точки происходит колебание по параболе $\tilde{y} = 2n \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{\xi}}\right)^2 + (\tilde{\eta} - n) \frac{\tilde{x}}{\tilde{\xi}} - n$ между точками $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ и $(-\tilde{\xi}, 2n - \tilde{\eta})$.

7⁰. Экспоненциально растущие гармоники (36) рассмотрим при $\theta = \frac{\pi}{2}: \vec{x} = e^{-t}\vec{e}(-j - \sigma) + e^t\vec{e}(\sigma - j), i = i_0 - \cos(2\sigma)$. При $t = 0$ начальная точка задается вектором $\vec{\xi} = 2 \cos \sigma \cos j O\vec{e}_0 - 2 \cos \sigma \sin j \vec{e}_0$ с полярными координатами $\xi = r \cos \varphi = 2 \cos \sigma \cos j, \eta = r \sin \varphi = -2 \cos \sigma \sin j \Rightarrow r = 2|\cos \sigma|, \varphi = -j$. При $t = 0$ все частицы находятся внутри круга радиуса 2. Движение начальной точки представим в виде $\vec{x} = 2 \cosh t \cos \sigma \vec{e}(\varphi) - 2 \sinh t \sin \sigma O\vec{e}(\varphi) = \tilde{x}O\vec{e}(\varphi) + \tilde{y}\vec{e}(\varphi)$. В координатной системе $O\vec{e}(\varphi), \vec{e}(\varphi)$ траектория начальной точки — ги-

пербола $\frac{\tilde{y}^2}{r^2} - \frac{\tilde{x}^2}{4-r^2} = 1$ с асимптотами $\tilde{x} = \pm \tilde{y} \tan \alpha$, $\tan \alpha = \sqrt{4r^2 - 1}$. Получаем схождение частиц по гиперболам до конечного круга ($r \leq 2$) и расхождение с разворотом на угол 2α .

8^0 . Экспоненциально растущее решение (40) преобразованием эквивалентности $t - \frac{1}{2}\theta \rightarrow t, j + \frac{1}{2}\theta \rightarrow j, \frac{1}{2}\theta \rightarrow \theta$ приводится к виду $\vec{x} = e^{t+2j}\vec{e}(t - \theta) + b(i)e^{-t-2j}\vec{e}(t + \theta)$, $i = 2b \sin(2\theta)$. Начальная точка $\vec{\xi} = \vec{x}(0) = (e^{2j} + be^{-2j}) \cos \theta O\vec{e}_0 + (be^{-2j} - e^{2j}) \sin \theta \vec{e}_0$, $\vec{e}(0) = O\vec{e}_0$, $O\vec{e}(0) = -\vec{e}_0$ определяет зависимости j, b от ξ, η — координат вектора $\vec{\xi}$. Движение начальной точки представим в виде $\vec{x} = \Lambda(t)\vec{x}$, где $\vec{x} = \xi \cosh t - \eta \cot \theta \sinh t$, $\tilde{y} = \eta \cosh t - \xi \tan \theta \sinh t$ — движение по гиперболе $\tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 \tan^2 \theta = \eta^2 - \xi^2 \tan^2 \theta$, матрица $\Lambda(t)$ поворачивает вектор \vec{x} на угол t . В начальной точке частица движется в направлении вектора

$$\vec{x}'(0) = -O\vec{\xi} - \left\| \begin{array}{cc} 0 & \cot \theta \\ \tan \theta & 0 \end{array} \right\|_{\text{sym}}$$

Получаем разворот сгущающихся частиц в среде $i(\xi, \eta)$, двигающихся по спиралям растущим по экспоненциально гиперболическому закону. Начало $\vec{x} = \vec{\xi} = 0$ стоит на месте.

12. Заключение

Для двумерной неизоэнтропической идеальной газовой динамики с однопараметрической термодинамикой получены все 8 типов решений. Для этой переопределенной системы получена частично интегрируемая переопределенная цепочка дифференциальных уравнений на вспомогательные функции. Уточняются все решения этой цепочки. Каждое решение цепочки либо противоречит исходной системе, либо порождает решения с помощью конечных формул. Для каждого решения исходной системы представлены гладкие движения частиц газа для любого значения времени. Траектории могут быть параболлами, кривыми с переменной выпуклостью, окружностями, кривыми, колеблющимися возле прямой, линейно растущими спиралями, конечной частью степенной кривой с периодическими колебани-

ями на ней, гиперболами, спиралями, растущими по экспоненциально гиперболическому закону.

Список литературы / References

- [1] Шанько ЮВ. Решение задачи Л.В. Овсянникова о двумерных изотермических движениях политропного газа. *Прикладная механика и техническая физика*. 2017;58(6):3–15. <https://doi.org/10.15372/PMTF20170601>
Shan'ko YV. Solution of the Ovsyannikov Problem of Two-Dimensional Isothermal Motion of a Polytrropic Gas. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017;58(6):957–967. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060013>
- [2] Овсянников ЛВ. Изобарические движения газа. *Дифференциальные уравнения*. 1994;30(10):1792–1799. <https://mi.mathnet.ru/de8472>
Ovsyannikov LV. The Isobaric Gas Motions. *Differential equations*. 1994;30(10):1792–1799. (in Russian)
- [3] Нешчадим МВ, Чупахин АП. О некоторых решениях уравнений движения сплошной среды со специальной термодинамикой. *Сибирские электронные математические известия*. 2011;8:317–332. <https://elibrary.ru/onrmdj>
Neshchadim MV, Chupachin AP. About Some Solutions of the Equation Moving Continuous Medium With Spacial Thermodynamics. *Siberian electronic mathematical news*. 2011;8:317–332. (in Russian)
- [4] Хабиров СВ. Плоские изотермические движения идеального газа без расширений. *Прикладная математика и механика*. 2014;8(3):411–424. <https://elibrary.ru/shltzt>
Khabirov SV. The plane isothermal motions of an ideal gas without expansions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014;8(3):287–297. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.09.012>
- [5] Иногамов НА. Цилиндрический аналог трохоидалных волн Герстнера. *Известия АН СССР. МЖГ*. 1984;20(5):145–150. <https://mzg.ipmnet.ru/ru/get/1985/5/145-150>
Inogamov NA. A cylindrical analog of trochoidal gerstner waves. *Fluid Dynamics*. 1985;20:791–796 (1985). <https://doi.org/10.1007/BF01050094>
- [6] Иногамов НА. Движение с «вмороженными» изобарами: трохоидалные волны и изобарическая релей-тейлоровская мода. *Доклады АН СССР*. 1984;278(1):57–61. <https://mi.mathnet.ru/dan9480>
Inogamov NA. Motion with “frozen” isobars: trochoidal waves and the isobaric Rayleigh–Taylor mode. *Sov. Phys. Dokl*. 1984;29(9):714–716.
- [7] Овсянников ЛВ. О «простых» решениях уравнений динамики политропного газа. *Прикладная механика и техническая физика*. 1999;40(2):5–12. <https://elibrary.ru/lxbqux>
Ovsyannikov LV. “Simple” solutions of the equations of dynamics for a polytrropic gas. *J Appl Mech Tech Phys*. 1999;40:191–197. <https://doi.org/10.1007/BF02468514>
- [8] Налимов ВИ, Пухначев ВВ. *Неуставившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей*. Новосибирск: Новосибирский государственный университет. 1975. 175 с.
Nalimov VI, Puchnachev VV. *The unsteady motions of an ideal fluid with a free boundary*. Novosibirsk: Novosibirsk state university. 1975. 175 p. (in Russian)
- [9] Shan'ko YuV. *Analysis of overdetermined system that describes the special class of two-dimensional motion of an ideal fluid*. [online] <http://arxiv.org/abs/1608.08186>

Сведения об авторах / Information about the Authors

Салават Валеевич Хабиров
доктор физ.-мат. наук, проф.
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа,
Россия

Salavat V. Khabirov
Sc.D. (Phys. & Math.), Prof.
Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia
habirov@anrb.ru
ORCID: 0000-0002-6126-9033



К юбилею Сабитова Камиля Басировича



15 мая 2026 года 75-летний юбилей отметил доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Академии наук Республики Башкортостан (АН РБ), главный научный сотрудник лаборатории «Механика твердого тела» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (ИМех УФИЦ РАН) Камилль Басирович Сабитов.

Сабитов К.Б. в 1973 г. с отличием окончил физико-математический факультет Стерлитамакского государственного педагогического института (СГПИ) и остался работать на кафедре математического анализа в должности ассистента. В 1974 г. был направлен на годичную стажировку в Куйбышевский государственный педагогический институт (КГПИ). В 1975–1976 гг. служил в рядах Советской Армии. В декабре 1976 г. Сабитов К.Б. поступил в аспирантуру КГПИ по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения и математическая фи-

зика. По окончании аспирантуры в январе 1980 г. вернулся на должность ассистента кафедры математического анализа СГПИ. В 1980 г. успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В 1981–1986 гг. работал заведующим кафедрой математического анализа, с 1986 г. — доцентом на этой же кафедре. В 1988 г. поступил в докторантуру факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова по научному направлению «Математическое моделирование и обработка космической информации». После окончания докторантуры в марте 1992 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Научными консультантами были известные ученые академики В.А. Ильин, А.В. Бицадзе и Е.И. Моисеев. С 1992 по 2007 гг. Сабитов К.Б. являлся деканом физико-математического факультета, а в июне 1992 г. был избран профессором кафедры математического анализа. В 1993 г. ему присвоено ученое звание профессора. В 1996 г. назначен директором Стерлитамакского филиала АН РБ. В 2006 г. избран членом-корреспондентом АН РБ. С 2024 года работает в ИМех УФИЦ РАН. Также Сабитов К.Б. является членом Американского математического общества и членом отделения физико-математических наук АН РБ.

В 1981 г. на базе физико-математического факультета Сабитов К.Б. организовал научный семинар по теории дифференциальных уравнений. В 1994 г. по его инициативе впервые в истории СГПА на базе физико-математического факультета открыта аспирантура по 3-м специальностям: 01.01.02, 01.02.05, 01.04.14, затем еще по двум специальностям: 05.13.18, 13.00.02. За эти годы под его руководством создана научная школа по теории дифференциальных уравнений. Ядром этой школы является руководимый им научный семинар, на котором регулярно обсуждаются кандидатские и докторские диссертации. Сабитов К.Б. подготовил 35 кандидатов физико-математических наук, при его активной поддержке 6 соискателей защитили докторские диссертации. В настоящее время он руководит научной работой 4-х соискателей на ученую степень доктора физико-математических наук.

Сабитов К.Б. будучи ведущим профессором кафедры математического анализа читал лекции по матема-

тическому анализу, по теории функций вещественной и комплексной переменной, дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики; разрабатывал различные спецкурсы по специализации «Дифференциальные уравнения». Как декан факультета осуществлял большую научно-организационную работу. Особое внимание он уделял созданию центра новых информационных технологий, новых научных лабораторий, оснащению новейшими ПЭВМ, применению вычислительной техники в учебном процессе и научных исследованиях. Им было открыто 3-и университетские специальности: «Прикладная математика и информатика» (2002 г.), «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» (2005 г.), «Физика» (2007 г.). В годы его деканства факультет значительно вырос в научном отношении, укрепились научными кадрами все кафедры.

В 1996 г. в г. Стерлитамаке на базе вузов и крупных химических и нефтехимических заводов по инициативе Сабитова К.Б. был открыт Стерлитамакский филиал Академии наук Республики Башкортостан (СФ АН РБ), в составе которого 5 отделов и 24 научных лаборатории. В отделе физико-математических и технических наук он является заведующим лабораторией дифференциальных уравнений. В 2009 г. СФ АН РБ реорганизован в Институт прикладных исследований Академии наук РБ (ИПИ АН РБ), выполняющий консолидирующую роль ученых Южного региона РБ и определяющий перспективные направления научных исследований соотнося их с проблемами предприятий. Здесь ученые занимались созданием наукоемких технологий, подготовкой научных кадров, выполняли хозяйственные работы на предприятиях Башкортостана и России.

В 2003 г. усилиями Сабитова К.Б. был открыт специализированный Совет К 212.315.01 по защите кандидатских диссертаций по 2-м специальностям: 01.01.02 и 05.13.18, председателем которого он являлся. На данном совете проведено 40 успешных защит кандидатских диссертаций из разных городов РФ.

Сабитов К.Б. активно ведет научно-исследовательскую работу по теории дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа, по теории интегральных уравнений, специальных функций. Последние годы активно занимается проблемами колебаний балок и пластин в различных средах. Им опубликовано более 230 научных работ и изданы 4 монографии [1–4].

Основные результаты, полученные Сабитовым К.Б.:

- установлены экстремальные свойства решений общих уравнений смешанного типа и показаны их применения при исследовании задачи Трикоми;
- впервые установлен эффект влияния гиперболической части уравнений смешанного типа на корректность задачи Трикоми;
- установлены новые принципы максимума для некоторых классов систем дифференциальных

уравнений в частных производных и показано их применение при изучении задачи Трикоми;

- для доказательства существования обобщенного решения задачи Трикоми для общих уравнений и некоторых систем уравнений смешанного типа разработан альтернирующий метод типа Шварца;
- в целях развития метода вспомогательных функций Моравец получены новые теоремы единственности решения задачи Франкля и обобщенной задачи Трикоми для важных классов уравнений смешанного типа, моделирующих трансзвуковые течения;
- окончательно решена проблема единственности решения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина;
- найдены собственные значения и соответствующие собственные функции спектральных задач Трикоми, Франкля, Геллерстедта и других для операторов Лаврентьева–Бицадзе, Чаплыгина в специальных областях, разработан аналог метода Фурье для решения краевых задач дифференциальных уравнений смешанного типа в специальных областях;
- установлены экстремальные свойства решений разностных аналогов систем уравнений смешанного типа и на их основе получены теоремы об однозначной разрешимости разностных задач Трикоми и Геллерстедта;
- установлены критерии единственности и достаточные условия разрешимости локальных граничных задач (Дирихле, Неймана и др.) и нелокальных краевых задач (с условиями Бицадзе–Самарского, Самарского–Ионкина) для уравнений смешанного типа, моделирующих двумерные установившиеся околосзвуковые течения, в прямоугольных областях;
- впервые поставлены обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического, эллипτικο-гиперболического типов от двух и трех переменных и установлены условия единственности, существования и устойчивости решения;
- впервые поставлены прямые и обратные краевые задачи для дифференциальных уравнений высоких порядков, найдены условия однозначной разрешимости и изучены их качественные свойства решений;
- получены обобщения известных теорем Кельвина, Ватсона и Юнга и показано их применение при решении граничных задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами;

- изучена задача Дирихле для уравнений смешанного типа с дробными производными, установлен критерий единственности, решение построено в явном виде;
- изучены колебания балок и пластин с различными граничными условиями на краях, установлены энергетические неравенства, из которых следует единственность решения поставленных начально-граничных задач.

Коллектив ИМех УФИЦ РАН и редакция журнала «Многофазные системы» от всей души поздравляют своего коллегу Камиля Басировича Сабитова с юбилеем и желают ему крепкого здоровья, благополучия и дальнейших творческих успехов на благо нашей науки!

Список литературы / References

- [1] Сабитов КБ, Биккулова ГГ, Гималтдинова АА. *К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа*. Уфа: Гилем; 2006. 155 с. <https://elibrary.ru/QJORCB>
Sabitov KB, Bikkulova GG, Gimaltdinova AA. *On the Theory of Mixed-Type Equations with Two Type-Changing Lines*. Ufa: Gilem; 2006. 155 p. (in Russian)
- [2] Сабитов КБ. *К теории уравнений смешанного типа*. М.: Физматлит; 2014. 304 с. <https://elibrary.ru/UGLDEP>
Sabitov KB. *On the Theory of Mixed-Type Equations*. Moscow: Fizmatlit; 2014. 304 p. (in Russian)
- [3] Сабитов КБ. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа*. М.: Наука, 2016; 272 с. <https://elibrary.ru/QWTYOF>
Sabitov KB. *Direct and inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type*. Moscow: Nauka, 2016; 272 p. (in Russian)
- [4] Сабитов КБ. *Обратные задачи для уравнений математической физики*. М.: Наука; 2023. 288 с.
Sabitov KB. *Inverse Problems for Mathematical Physics Equations*. Moscow: Nauka; 2023. 288 p. (in Russian)

Содержание

С.Ф. Урманчеев

Колонка главного редактора 49–50

Механика жидкости и газа

Р.Р. Галикеева

Численное моделирование течения аномально термовязкой жидкости в нагреваемой каверне 51–58

А.Я. Тимершаехова, М.Р. Губайдуллин, А.Я. Давлетбаев, З.С. Мухаметова

Моделирование гидродинамических исследований со ступенчатым изменением давления в низкопроницаемых коллекторах с трещиной гидроразрыва 59–64

Б.А. Усманов, Р.Р. Галеев, А.А. Мусин, Р.Р. Зиннатуллин

Определение объёмного распределения электромагнитного поля по данным диэлектрического нагрева .. 65–71

А.С. Родионов, Э.Р. Закирова

Численное решение начально-граничной задачи о повторном воздействии ударного импульса на пузырьковую жидкость 72–80

С.В. Хабиров

Плоские движения идеального газа без расширений со специальной термодинамикой 81–98

Портрет ученого

К юбилею Сабитова Камиля Басировича 99–101

Contents

S.F. Urmancheev Editor-in-Chief's Column (<i>in Russian</i>)	49–50
Liquid & Gas Mechanics	
R.R. Galikeeva Numerical simulation of anomalously termoviscous fluid flow in a heated cavity (<i>in Russian</i>)	51–58
A.Ya. Timershaehova, M.R. Gubaidullin, A.Ya. Davletbaev, Z.S. Mukhametova Modelling of well tests with stepwise pressure changes in low-permeability reservoirs with a hydraulic fracture (<i>in Russian</i>)	59–64
B.A. Usmanov, R.R. Galeev, A.A. Musin, R.R. Zinnatullin Determination of volumetric electromagnetic field distribution from dielectric heating data (<i>in Russian</i>)	65–71
A.S. Rodionov, E.R. Zakirova Numerical solution of the initial boundary value problem of the repeated impact of a shock pulse on a bubbly liquid (<i>in Russian</i>)	72–80
S.V. Khabirov The plane motions of the ideal gas without extension with the spetial thermodynamics (<i>in Russian</i>)	81–98
Profiles	
For the anniversary of Kamil Basirovich Sabitov (<i>in Russian</i>)	99–101