

ISSN: 2658–5782

Номер 1

2025

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Исследование вольтамперного временного ряда в случае испарения электролитов алюминиевой проволоки

Р.Д. Муртазина¹✉, М.Д. Биткулов², Э.Р. Шайхиев³

¹ Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

³ Нанкинский университет финансов и экономики, Нанкин, Китай

E-mail: reginaufa@yandex.ru

Под динамической системой в общем смысле понимается математическая модель эволюции реальной системы, состояние которой в любой момент времени однозначно определяется ее начальным состоянием. Часто при исследовании динамических систем основным источником информации о поведении исследуемого объекта является набор значений наблюдаемой величины, сделанных в некоторые (последовательные) моменты времени, так называемый временной ряд. Одной из основных задач при анализе временных рядов является реконструкция динамической системы, породившей данный ряд. Так, например, для локально параметризованной поверхности с помощью евклидовых координат (многообразия) целой размерности Такенс реконструировал поведение исходной динамической системы. Целями настоящего исследования являются оценка размерности аттрактора классических динамических систем, описываемых уравнениями Ван-дер-Поля, Хенона и логистической модели, а также выявление значимых параметров системы перколяционного сенсора при испарении электролитов алюминия путем определения гладкости детерминированной модели вольтамперных временных рядов. Для оценки размерности аттрактора динамической системы применяется метод главных компонент, идея которого состоит в повороте осей координат в многомерном пространстве и выборе направлений, вдоль которых, в основном, развивается движение. Определены размерности аттрактора для уравнений Ван-дер-Поля, Хенона и логистической модели, которые равны двум, трем и двум соответственно. Определен индекс Херста вольтамперного временного ряда перколяционного сенсора при испарении электролитов алюминия, приблизительно равный 0.7. Следовательно, значения данного временного ряда сильно коррелируемы. Методом главных компонент также показано, что рассмотренный временной ряд описывается двумя компонентами.

Ключевые слова: модель Хенона, логистическая модель, модель Ван-дер-Поля, вольтамперный временной ряд, фазовый портрет, метод главных компонент

Study of the volt-ampere time series in the case of evaporation of aluminum wire electrolytes

R.D. Murtazina¹✉, M.D. Bitkulov², E.R. Shaihiiev³

¹ Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

² Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia

³ Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing, China

E-mail: reginaufa@yandex.ru

In the general sense, a dynamic system is a mathematical model of the evolution of a real system whose state at any given time is uniquely determined by its initial state. Often, when studying dynamic systems, the main source of information on the behavior of the object under study is a set of values of the observed quantity taken at certain (successive) points in time, the so-called time series. One of the main tasks in analyzing time series is to reconstruct the dynamic system that generated the series. For example, for a locally parameterized surface, Takens reconstructed the behavior of the original dynamic system using Euclidean coordinates (manifold) of integer dimension. The objectives of this study are to estimate the dimension of the attractor of classical dynamic systems described by the Van der Pol, Henon, and logistic model equations, as well as to identify significant parameters of the percolation sensor system during evaporation of aluminum electrolytes by determining the smoothness of the deterministic model of volt-ampere time series. To estimate the attractor dimension of the dynamic system, the principal component method is used, the idea of which is to rotate the coordinate axes in a multidimensional space and select the directions along which the motion mainly develops. The dimensions of the attractor for the Van der Pol, Henon and logistic model equations are determined, which are equal to two, three and two, respectively. The Hurst index of the volt-ampere time series of the percolation

sensor during evaporation of aluminum electrolytes is determined, approximately equal to 0.7. Consequently, the values of this time series are strongly correlated. The principal component method also shows that the considered time series is described by two components.

Keywords: Henon model, logistic model, Van der Pol model, current-voltage time series, phase portrait, principal component analysis

1. Введение

Под динамической системой в общем смысле понимается математическая модель эволюции реальной системы, состояние которой в любой момент времени однозначно определяется ее начальным состоянием. Математически понятие динамической системы формулируется как тройка (P, I, φ) , состоящая из многообразия P и однопараметрической непрерывной группы преобразований — отображения $\varphi(t, x)$, записываемого в виде $\varphi^t(x) : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, где параметр $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ является временем. Очень часто при исследовании динамических систем основным источником информации о поведении исследуемого объекта является набор значений наблюдаемой величины, сделанных в некоторые (последовательные) моменты времени, так называемый временной ряд.

Одной из основных задач при анализе временных рядов является реконструкция динамической системы, породившей данный ряд. Так, например, для локально параметризованной поверхности с помощью евклидовых координат (многообразия) целой размерности Такенс в работе [1] реконструировал поведение исходной динамической системы.

Голландский инженер Ван-дер-Поль предложил использовать дифференциальное уравнение второго порядка (см., например, [2]) для описания колебаний, возникающих в электрических цепях:

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0, \quad (1)$$

где μ — неотрицательный параметр. Траектория движения, заданного уравнением Ван-дер-Поля, в фазовом пространстве определяется параметром μ и начальными данными $x(0), x'(0)$. Данное уравнение является «эталонной» моделью нелинейной динамики и теории колебаний, которая описывает автоколебания.

Часто динамику популяции описывают уравнением Хенона [3]

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где a, b — некоторые числовые параметры, такие что $a > 0$ и $|b| \leq 1$, или логистической моделью, впервые предложенной Ферхюльстом [4]:

$$x_{n+1} = \mu \cdot x_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\mu > 0$ — некоторый параметр. Уравнение Хенона применяется также в астрофизике, а логистическая модель — в биологии. Модель Хенона демонстрирует большое разнообразие хаотического поведения из-за чего является одним из основных примеров систем с хаотическим поведением.

Для описания поведения нелинейных динамических систем широко используются так называемые аттракторы. Аттрактором системы

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

называется компактное инвариантное множество Ω , если существует ε -окрестность $\Omega(\varepsilon)$ множества Ω такая, что траектория x_n системы (4), для которой $x_0 \in \Omega(\varepsilon)$, стремится к множеству Ω при $n \rightarrow \infty$, то есть $\rho(x_n, \Omega) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Целями настоящего исследования являются оценка размерности аттрактора (количество компонент, определяющих систему) классических динамических систем, описываемых уравнениями Ван-дер-Поля, Хенона и логистической модели, а также выявление значимых параметров системы перколяционного сенсора при испарении электролитов алюминия путем определения гладкости детерминированной модели вольтамперных временных рядов.

Идентификация систем (реконструкция уравнений) по дискретным последовательностям экспериментальных данных (временных рядов) позволяет понять динамику процессов, изменяющихся со временем и предсказывать тенденции (см. [5]). Выявляя значимые параметры (размерность аттрактора) временного ряда, определяем какими значениями можно пренебречь, а какие значения необходимо учесть. Наблюдаемые существенные параметры при проведении исследования испарения алюминиевой проволоки при погружении в химический раствор подтвердились расчетами, представленными в работе.

В случае немногочисленной выборки, не теряя точности решения, используются не очень большие вычислительные мощности. Метод главных компонент на небольшой выборке (не более 10 тысяч) быстро выявляет компоненты, не теряя точности решения.

В работе для оценки размерности аттрактора динамической системы применяем метод главных компонент, быстро выявляющий компоненты на выборке не более 10 тысяч данных, сохраняя точность решения (см. [6]). Идея данного метода состоит в повороте осей координат в фазовом пространстве и выборе направлений, вдоль которых, в основном, развивается движение. Для облегчения обозначений предположим, что среднее значение наблюдаемого значения η равно нулю. Векторы $W(t_i) = (\eta_i, \eta_{i+1}, \dots, \eta_{i+w-1})$ строятся в пространстве размерности k , причем предполагается, что время задержки равно интервалу выборки $l = 1$. В данном пространстве производится преобразование поворота, причем новые оси координат выбираются в соответствии с теми направлениями, вдоль которых наибо-

лее интенсивно развивается движение. Количественно эти направления и протяженность вдоль них определяются при помощи квадратичной матрицы ковариаций Θ порядка k компонент вектора w

$$\Theta_{i,j} = \sum_{n=0}^{N-k} \eta_{i+n} \eta_{j+n}, i, j = 1, \dots, k. \tag{5}$$

Матрица Θ – симметрична, вещественна и положительно определена. Следовательно, ее собственные векторы образуют полный ортонормированный базис в R^k . Отсортируем собственные значения в порядке возрастания – $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ и соответствующие собственные векторы – s_1, s_2, \dots, s_k . Если присутствует измерительный шум, то все σ_i^2 не равны нулю, потому что в направлениях, которые являются незначительными, представлена шумовая компонента. В этом случае размерность можно оценить как число D . Проекция вектора $w(t_i)$ на соответствующие направления, то есть на первые D компонент вектора x' . Остальные компоненты отбрасываются, так как соответствующие им собственные значения образуют «шумовой пьедестал». Таким образом, получим D -мерные векторы $x(t_i)$ с компонентами $x_k(t_i) = s_k \cdot w(t_i)$. Метод главных компонент – это частный случай фильтрованного вложения. Данный метод полезен, если имеются измерительные шумы, так как $x_1(t)$ более плавнее, чем $\eta(t)$.

2. Модель Хенона

Для анализа уравнения (2) введем дополнительную переменную $y_n = bx_{n-1}$, которая сводит исходное отображение к двумерному отображению вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases} \tag{6}$$

Для определения точек равновесия необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = 1 - ax^2 + y, \\ y = bx, \end{cases}$$

которая приводит к квадратному уравнению

$$ax^2 + (1 - b)x - 1 = 0.$$

Так как $a > 0$, то система имеет две неподвижные точки $u_1(x_1, y_1)$, $u_2(x_2, y_2)$, где

$$x_{1,2} = \frac{(b - 1) \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad y_{1,2} = bx_{1,2},$$

и $D = (1 - b)^2 + 4a > 0$.

В окрестности точек u_1, u_2 проведем анализ локальных бифуркаций. Сначала выясним, при каких значениях параметров a и b данные точки являются негиперболическими. Для этого необходимо определить, при

каких условиях матрица Якоби будет иметь собственные значения равные 1 по модулю. Определим матрицу Якоби для точки u_1 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 - b - \sqrt{D} & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A_1 – это решения квадратного уравнения

$$\sigma^2 + (b - 1 + \sqrt{D}\sigma) - b = 0. \tag{7}$$

Квадратное уравнение (7) имеет хотя бы один корень по модулю равный 1, когда параметры a и b удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < a \leq 3, \quad b = 1.$$

В этом случае собственные значения матрицы A_1 будут такие

$$\sigma_{1,2} = e^{\pm i\varphi},$$

где угол φ определяется с помощью выражения

$$(1 - \cos \varphi)^2 = 1 + a.$$

Теперь определим размерность аттрактора, образованного уравнением (6) при $a = 1.8, b = -0.05$. Собственные значения σ матрицы ковариации Θ (5) будут иметь следующие значения, округленные с точностью до 0.000001 (см. рис. 1): 956.380151, 683.130899, 246.209364, 78.935168, 76.134774.

По качественным изменениям графика на рис. 1 видно, что размерность аттрактора равна трем.

3. Логистическая модель

Рассмотрим поведение системы (3) на отрезке $[0, 1]$ при выполнении условий:

$$0 < \mu \leq 4, \quad 0 \leq x_0 \leq 1.$$

Найдем точки равновесия системы. Для этого необходимо решить уравнение $x = f(x, \mu)$, где

$$f(x, \mu) = \mu x(1 - x),$$

то есть решается уравнение

$$x = \mu x(1 - x). \tag{8}$$

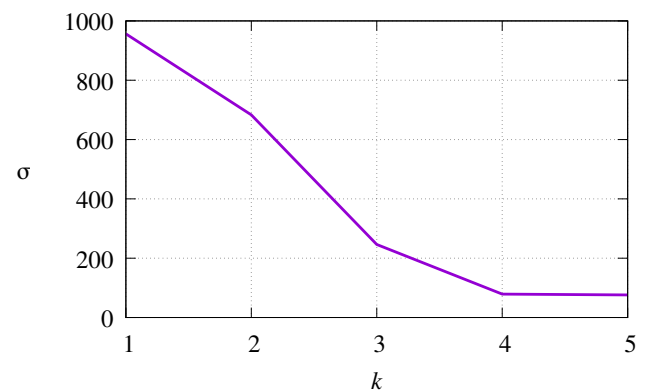


Рис. 1. Значения собственных чисел матрицы уравнения Хенона (2) при $a = 1.8, b = -0.05$

Уравнение (8) имеет два решения:

$$x_0^* = 0, \quad x_1^* = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

Первое решение находится на отрезке $0 \leq x \leq 1$ при любых μ , а второе — только при $x \geq 1$.

Определим свойства устойчивости найденных точек равновесия. Для этого найдем производную функции

$$f'_x(x, \mu) = \mu - 2\mu x.$$

Исследуем сначала точку равновесия $x_0^* = 0$. Так как $f'_x(0, \mu) = \mu$, значит точка равновесия $x_0^* = 0$ будет асимптотически устойчива при $0 < \mu < 1$ и неустойчива при $\mu > 1$.

Рассмотрим точку равновесия $x_1^* = \frac{\mu - 1}{\mu}$. Для нее производная имеет вид:

$$f'_x(x_1^*(\mu), \mu) = 2 - \mu.$$

Значит при $\mu \in (1, 3)$ точка $x^*(\mu)$ — асимптотически устойчива, а при $\mu > 3$ — неустойчива.

Определим размерность аттрактора, порожденного логистической моделью. При $\mu = 3.9$ собственные значения σ матрицы ковариации Θ , округленные с точностью 0.000001, следующие (см. рис. 2): 1266.317915, 1150.614079, 542.278221, 225.531951, 142.284321.

По качественным изменениям графика на рис. 2 видно, что размерность аттрактора равна двум.

4. Модель Ван-дер-Поля

Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля (1). Пусть $x = x_1, x' = x_2$, тогда

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1. \end{cases}$$

Обозначим

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(X, \mu) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix}.$$

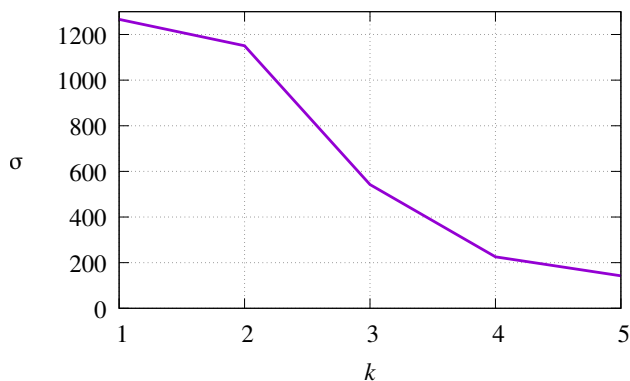


Рис. 2. Значения собственных чисел матрицы логистической модели (3) при $\mu = 3.9$

Тогда $\frac{dX}{dt} = f(X, \mu), X \in \mathbb{R}^2$.

Решая уравнение $f(X, \mu) = 0$, получаем, что единственная точка равновесия — это точка начала координат $\Theta = (0, 0)$.

Далее проанализируем матрицу Якоби следующего вида:

$$f'_X(X, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu x_1 x_2 - 1 & \mu(1 - x_1^2) \end{bmatrix}.$$

Если подставить в матрицу Якоби точку Θ , то получается

$$f'_X(\Theta, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}.$$

Проанализировав собственные значения матрицы $f'_X(\Theta, \mu)$ получаем, что при $\mu = 0$ точка равновесия $\Theta(0, 0)$ имеет тип «центр», при $0 < \mu < 2$ — неустойчивый фокус, при $\mu > 2$ — устойчивый фокус.

В результате получаем, что аттрактор имеет размерность 2.

Далее рассмотрим фазовый портрет при $0 < \mu < 2$ (см. рис. 3).

В системе при $0 < \mu < 2$ возникает автоколебательное решение, а при условии $\mu \rightarrow 0$ цикл приближается к окружности радиуса 2.

Определим размерность аттрактора, образованного уравнением (1). Рассмотрим случай, когда $\mu = 0.5$. Собственные значения σ , округленные с точностью до 0.000001, матрицы ковариации Θ имеют следующий вид (см. рис. 4): 382.344409, 0.031335, 0.008106, 0.003813, 0.002478.

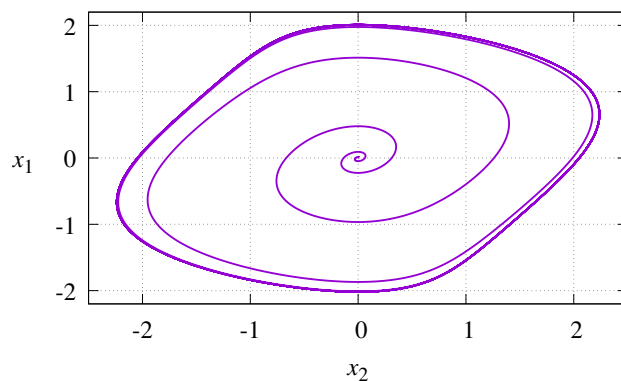


Рис. 3. Фазовый портрет при $\mu = 0.5$

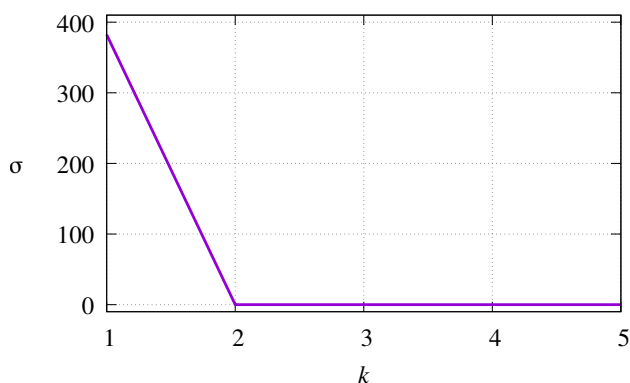


Рис. 4. Значения собственных чисел матрицы уравнения Ван-дер-Поля (1) при $\mu = 0.5$

5. Перколяционный сенсор при испарении алюминия

Рассмотрим вольтамперный временной ряд, полученный на основе исследования испарения алюминиевой проволоки при погружении в химический раствор (см. рис. 5).

Ряд из $n = 9800$ значений (см. [7]) разделим на 3 части, соответствующие различным этапам. Исследуем второй этап, отвечающий за переход из макро или микроразмерных в наноразмерные формы, поскольку именно эта часть наиболее сильно подвержена различным параметрам среды.

Покажем возможность описания данного временного ряда гладкой детермированной моделью.

В работе [11] получено, что результаты эксперимента, определенные ограниченной последовательностью действительных чисел A , могут быть описаны гладкой детермированной моделью, если величина

$$\frac{C_{n,\epsilon}(A)}{n - \ln \epsilon} \tag{9}$$

равномерно ограничена при $n - \ln \epsilon \rightarrow \infty$. В данном случае $A = \{a_i, 0 \leq i < \infty\}$, а значение $C_{n,\epsilon}(A)$ — число элементов множества $G_{n,\epsilon}$. Множество $G_{n,\epsilon}$ определяется следующим образом: $i > 0$, то $i \in G_{n,\epsilon}$ тогда и

только тогда, когда $0 \leq j < i$ и $j \in G_{n,\epsilon}$ (i, j — индексы последовательности A). Величина ϵ определяется из следующего неравенства:

$$\max\{|a_i - a_j|, |a_{i+1} - a_{j+1}|, \dots, |a_{i+n} - a_{j+n}|\} \geq \epsilon.$$

В противном случае, если (9) неравномерно ограничена, то последовательность A не может быть объяснена с помощью детермированной модели. Для рассмотренной задачи получается, что при любом ϵ существует предел, а значит процесс не является случайным.

Применяя метод главных компонент собственные значения матрицы ковариации, округленные с точностью до 0.000001, определяются так: 254.607831, 0.032616, 0.008797, 0.004131, 0.002689.

Здесь аттрактор имеет размерность равную двум.

Далее для анализа временного ряда найдем коэффициент Херста (см. [8]). Если временной ряд задается последовательностью ξ_i , состоящей из T элементов, то для него необходимо определить среднее значение $\bar{\xi}_i$. Далее определяется среднеквадратичное отклонение:

$$S(T) = \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (\xi_i - \bar{\xi}) \right)^{1/2},$$

максимальное отклонение

$$M_T = \max_{1 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^t (\xi_i - \bar{\xi}_t)$$

и минимальное отклонение

$$m_T = \min_{1 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^t (\xi_i - \bar{\xi}_t).$$

Введем размах накопленных сумм:

$$R(T) = M_T - m_T.$$

Из соотношения

$$\frac{R(T)}{S(T)} \approx (aT)^H, \quad a - const, \quad a > 0, \quad a \neq \frac{1}{T},$$

определим показатель Херста ($0 \leq H \leq 1$).

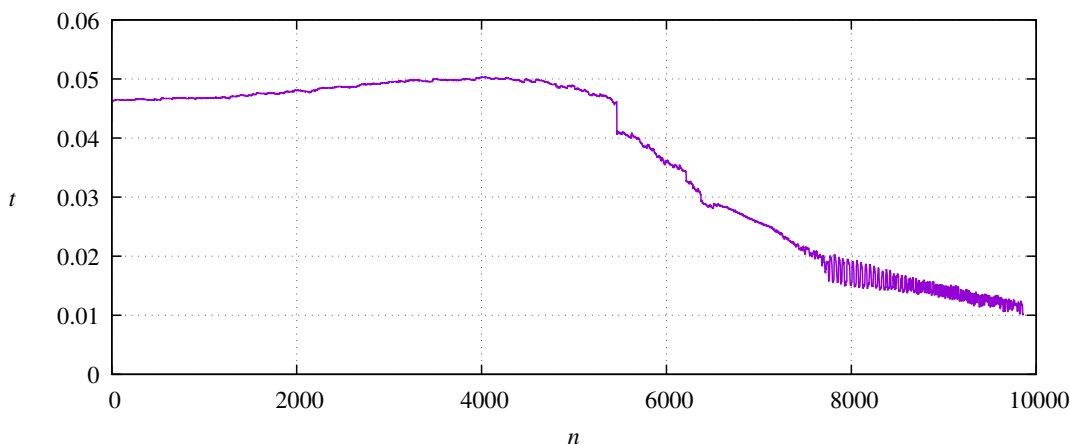


Рис. 5. Графический вид временного ряда

Для случайного процесса с независимыми приращениями и конечной дисперсией в работе [9] было строго доказано, что показатель Херста равен 0.5 (временной ряд соответствует гауссовскому шуму, то есть случайному процессу).

Херст предположил, что сдвиг значений от 0.5 происходит в связи с существованием для природных процессов «памяти». Отличие показателя Херста от 0.5 также объясняют отражением фрактальных свойств процессов, порождающих временные ряды. В работе [10] по аналогии с обобщенным броуновским движением предполагается, что

- при коэффициенте Херста $0 \leq H \leq 0.5$ временной ряд называется антиперсистентным или «розовым шумом»;
- при $0.5 \leq H \leq 1$ временной ряд называется персистентным или «черным шумом».

Для вольтамперного временного ряда перколяционного сенсора при испарении электролитов алюминия (см. рис. 5) индекс Херста H с точностью до 0.0001 равен 0.6658. Следовательно, рассматриваемый временной ряд является персистентным.

6. Заключение

Методом главных компонент для уравнений Ван-дер-Поля, Хенона и логистической модели определены размерности аттрактора. Получено, что уравнение Ван-дер-Поля и логистическая модель образуют аттракторы размерности 2, а уравнение Хенона образует аттрактор размерности 3.

Определен индекс Херста вольтамперного временного ряда перколяционного сенсора при испарении электролитов алюминия, приблизительно равный 0.6658. Следовательно, значения данного временного ряда сильно коррелируемы. Методом главных компонент также показано, что рассмотренный временной ряд описывается двумя компонентами.

Сведения об авторах / Information about the Authors

Регина Димовна Муртазина

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

Марат Дамирович Биткулов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Эрик Радикович Шайхиев

Нанкинский университет финансов и экономики, Нанкин, Китай

Список литературы / References

- [1] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Springer Lecture Notes in Mathematics. 1981. V. 898. P. 366–381. DOI: [10.1007/BFb0091924](https://doi.org/10.1007/BFb0091924)
- [2] Van der Pol B. On «Relaxation-Oscillations» // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1926. V. 2, iss. 11. P. 978–992. DOI: [10.1080/14786442608564127](https://doi.org/10.1080/14786442608564127)
- [3] Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы / Под. ред. Я.Г. Синая и О.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152–163. Henon M. A two-dimensional mappings with a strange attractor // Commun. Math. Phys. 1976. V. 50, no. 1. P. 69–77. DOI: [10.1007/BF01608556](https://doi.org/10.1007/BF01608556)
- [4] Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // Correspondence Mathematique et Physique (Bruxelles). 1838. V. 10. P. 113–121.
- [5] Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. 320 с. Bezruchko B.P., Smirnov D.A. Mathematical modeling and chaotic time series. Saratov, 2005, 320 p.
- [6] Broomhead D.S., King G.P. Extracting qualitative dynamics from experimental data // Physica D. 1986. V. 20. P. 217–236. DOI: [10.1016/0167-2789\(86\)90031-X](https://doi.org/10.1016/0167-2789(86)90031-X)
- [7] Биткулов М.Д. Фрактальный анализ вольтамперных временных рядов перколяционного сенсора при испарении фоновых электролитов различного состава: выпускная квалификационная работа / Биткулов Марат Дамирович. Уфа, 2024. 27 с. Bitkulov M.D. Fractal analysis of current-voltage time series of a percolation sensor during evaporation of background electrolytes of various compositions. Ufa, 2024. P. 27 (in Russian)
- [8] Hurst H.E. Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of American Society of Civil Engineers. 1951. V. 116. P. 770–808.
- [9] Feller W. The asymptotic distribution of the range of sums of independent variables // Ann. Math. Statist. 1951. V. 22. P. 427–432. DOI: [10.1214/aoms/1177729589](https://doi.org/10.1214/aoms/1177729589)
- [10] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 262 с. Feder J. Fractals (Physics of Solids and Liquids). Springer. 1988. 310 p.
- [11] Takens F. Distinguishing deterministic and random series. In Nonlinear Dynamics and Turbulence. Boston: Pitman, 1985. P. 314–333.
- [12] Калаш Ю.А., Логинов В.М. Показатель Херста и его скрытые свойства // Сиб. журн. индустр. матем. 2002. Т. 5. № 4. С. 29–37. Kalush Yu.A., Loginov V.M. Hurst exponent and its hidden properties // Sib. j. industr. mat. 2002. V. 5, No. 4. P. 29–37 (in Russian). EDN: HZOKUN

Regina D. Murtazina

Ph.D. (Physics & Mathematics)

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

reginaufa@yandex.ru

ORCID: [0009-0004-3615-9643](https://orcid.org/0009-0004-3615-9643)

Marat D. Bitkulov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia

bitkulovmarat@gmail.com

ORCID: [0009-0008-2082-605X](https://orcid.org/0009-0008-2082-605X)

Erik R. Shaihiev

Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing, China

erik08082002@mail.ru

ORCID: [0009-0006-1414-7398](https://orcid.org/0009-0006-1414-7398)