ISSN: 2658–5782

Номер 2 2021

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 16 (2021), № 2, с. 79–83

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2021.2.011
DOI: 10.21662/mfs2021.2.011
УДК 532.591:534-18

Получена: 3.11.2021
Принята: 27.01.2022

Вывод дисперсионного уравнения для определения скорости волны Стоунли на границе пористых сред, насыщенных гидратом и водой[1]

Каримова Г.Р., Рафикова Г.Р.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В настоящей работе рассматривается процесс распространения волны Стоунли вдоль границы раздела двух сред, где верхняя среда представлена песком, насыщенным водой, а нижняя — песком, насыщенным газогидратом. В прямоугольной системе координат выбраны направления осей для случая, когда плоскостью раздела является $z = 0$. Рассмотрена волна Стоунли вертикальной поляризации, т.е. отсутствует горизонтальное поперечное перемещение. Гармоническая волна распространяется на достаточно удаленное расстояние от источника взрыва и представляется суммой продольных и поперечных волн в каждом полупространстве. Для описания математической модели использованы волновые уравнения, уравнения для смещения частиц и компонентов тензоров напряжения, которые дополнены граничными условиями. В результате нахождения аналитических решений в виде гармонической бегущей волны для смещений, потенциалов, векторов продольной и поперечной волн получено дисперсионное уравнение для определения скорости волны Стоунли. При использовании данного уравнения и экспериментальных значений скоростей продольных и поперечных волн в насыщенных пористых средах можно найти скорость волны Стоунли в зависимости от различных параметров пористой среды.

Ключевые слова: поверхностные акустические волны, волна Стоунли, дисперсионное уравнение

1. Введение

Большое внимание исследователями уделяется поверхностным акустическим волнам, так как области их применения и изучения для механики сплошных сред многогранны [1]. Эти упругие волны распространяются вдоль свободной поверхности твёрдого тела или границы с другими средами и затухают при удалении от границы. В настоящее время достаточно значимый вклад в изучении большого количества явлений вносит теория акустических волн. Значительное количество работ посвящено физическим свойствам, применениям и характеристикам этих волн при различных условиях сред с различными усложняющими факторами [2–4]. Известно, что поверхностные волны бывают с вертикальной и горизонтальной поляризацией, к наиболее часто встречающимся частным случаям можно отнести волны Рэлея, Лява и Стоунли [5]. Наибольший интерес вызывает задача о распространении поверхностной гармонической волны вдоль границы раздела двух жестко склеенных сред, которая впервые была решена в работе британского сейсмолога Роберта Стоунли в 1924 году [6]. Волны такого типа исследуются до сих пор с различными усложняющими факторами в геофизике, сейсмологии для оценки проницаемости породы, распределения, мощности пласта и др. Например, в работе [7] рассмотрено влияние контакта различных граничащих сред на свойства акустических волн Стоунли, получено дисперсионное уравнение. Высокочастотные волны Стоунли дают информацию о физических свойствах прилегающих слоев, о возможных межфазных трещинах [8]. Практическое применение распространения волны Сто-

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207.

унли продемонстрировано в ходе сейсмологической разведки на газогидратных месторождениях Малик (Канада) [9].Анализ данных, полученных с сейсмографов, позволил оценить проницаемость породы, мощность гидратного пласта и получить значения скоростей волны Стоунли.

Целью настоящей работы является исследование процесса распространения волны Стоунли вдоль границы раздела «песок, насыщенный водой – песок, насыщенный газогидратом метана», а также вывод уравнения для определения скорости волны Стоунли. В соответствии с целью были поставлены следующие задачи:

1) описание математической модели распространения волны Стоунли на границе «песок, насыщенный водой – песок, насыщенный газогидратом метана»;

2) получение аналитических решений в виде гармонической бегущей волны для давления, смещений, потенциалов для векторов продольной и поперечной волн;

3) вывод уравнения для определения скорости волны Стоунли.

2. Постановка задачи

Рассмотрим процесс распространения волны Стоунли вдоль границы раздела двух сред «песок, насыщенный водой – песок, насыщенный газогидратом метана» (рис. 1). В декартовой системе координат выбираем направления осей и считаем, что плоскостью раздела является $z = 0$. Допустим, что волна Стоунли вертикальной поляризации, то есть отсутствует горизонтальное поперечное перемещение. Гармоническая волна распространяется на достаточно удаленное расстояние от источника взрыва.

Для области песка, насыщенного гидратом, выписаны следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(s_1)}}{\partial t^2} = C_l^{(s_1)^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi^{(s_1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(s_1)}}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 \psi^{(s_1)}}{\partial t^2} = C_t^{(s_1)^2}\left(\frac{\partial^2 \psi^{(s_1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(s_1)}}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$
$$C_l^{(s_1)^2} = (\lambda_1 + 2\mu_1)\Big/\rho^{(s_1)},\ C_t^{(s_1)^2} = \mu_1\Big/\rho^{(s_1)};$$

$$W_x^{(s_1)} = \frac{\partial \varphi^{(s_1)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(s_1)}}{\partial z},$$
$$W_z^{(s_1)} = \frac{\partial \varphi^{(s_1)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi^{(s_1)}}{\partial x}; \qquad (2)$$

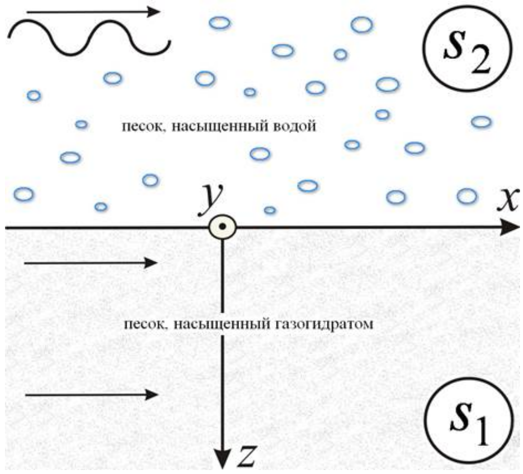

Рис. 1. Распространение волны на границе двух сред

$$P_{xz}^{(s_1)} = \mu_1\left(\frac{\partial W_x^{(s_1)}}{\partial z} + \frac{\partial W_z^{(s_1)}}{\partial x}\right),$$
$$P_{zz}^{(s_1)} = \lambda_1\left(\frac{\partial W_x^{(s_1)}}{\partial x} + \frac{\partial W_z^{(s_1)}}{\partial z}\right) + 2\mu_1\frac{\partial W_z^{(s_1)}}{\partial z}. \qquad (3)$$

Для области песка, насыщенного водой:

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(s_2)}}{\partial t^2} = C_l^{(s_2)^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi^{(s_2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(s_2)}}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 \psi^{(s_2)}}{\partial t^2} = C_t^{(s_2)^2}\left(\frac{\partial^2 \psi^{(s_2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(s_2)}}{\partial z^2}\right), \qquad (4)$$
$$C_l^{(s_2)^2} = (\lambda_2 + 2\mu_2)\Big/\rho^{(s_2)},\ C_t^{(s_2)^2} = \mu_2\Big/\rho^{(s_2)};$$

$$W_x^{(s_2)} = \frac{\partial \varphi^{(s_2)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(s_2)}}{\partial z},$$
$$W_z^{(s_2)} = \frac{\partial \varphi^{(s_2)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi^{(s_2)}}{\partial x}; \qquad (5)$$

$$P_{xz}^{(s_2)} = \mu_2\left(\frac{\partial W_x^{(s_2)}}{\partial z} + \frac{\partial W_z^{(s_2)}}{\partial x}\right),$$
$$P_{zz}^{(s_2)} = \lambda_2\left(\frac{\partial W_x^{(s_2)}}{\partial x} + \frac{\partial W_z^{(s_2)}}{\partial z}\right) + 2\mu_2\frac{\partial W_z^{(s_2)}}{\partial z}, \qquad (6)$$

где φ, ψ — скалярный и векторные потенциалы для векторов продольной и поперечной волн в двух средах; λ, μ — параметры Ламе; $C_l^{(s_1)}$, $C_l^{(s_2)}$, $C_t^{(s_1)}$, $C_t^{(s_2)}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно; $W_x^{(s_1)}$, $W_z^{(s_1)}$, $W_x^{(s_2)}$, $W_z^{(s_2)}$ — смещения частиц по координатам x и z в средах; $P_{xz}^{(s_1)}$, $P_{zz}^{(s_1)}$, $P_{xz}^{(s_2)}$, $P_{zz}^{(s_2)}$ — компоненты тензора напряжений; s_1 — область песка, насыщенного газогидратом; s_2 — область песка, насыщенного водой; l — продольная волна; t — поперечная волна.

Систему уравнений (1)–(6), состоящую из волновых уравнений (1) и (4), уравнений смещения частиц (2) и (5), уравнений компонент тензоров напряжения (3) и (6), дополним граничными условиями:

$$z=0: \quad W_x^{(s_1)}=W_x^{(s_2)}, \quad W_z^{(s_1)}=W_z^{(s_2)}, \quad P_{xz}^{(s_1)}=P_{xz}^{(s_2)}, \quad P_{zz}^{(s_1)}=P_{zz}^{(s_2)}. \tag{7}$$

3. Вывод дисперсионного уравнения

Для волновых уравнений (1) и (4) решения для двух областей ищем в виде гармонической бегущей волны:

$$\varphi^{(s_1)}=f(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad \psi^{(s_1)}=g(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad \varphi^{(s_2)}=q(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad \psi^{(s_2)}=r(z)e^{i(kx-\omega t)}. \tag{8}$$

После подстановки (8) в уравнения (1) и (4) получаем четыре дифференциальных уравнения второго порядка:

$$-\omega^2 f(z)e^{i(kx-\omega t)}= C_l^{(s_1)^2}\left(-k^2 f(z)e^{i(kx-\omega t)}+\frac{d^2 f(z)}{dz^2}e^{i(kx-\omega t)}\right),$$

$$-\omega^2 g(z)e^{i(kx-\omega t)}= C_t^{(s_1)^2}\left(-k^2 g(z)e^{i(kx-\omega t)}+\frac{d^2 g(z)}{dz^2}e^{i(kx-\omega t)}\right),$$

$$-\omega^2 q(z)e^{i(kx-\omega t)}= C_l^{(s_2)^2}\left(-k^2 q(z)e^{i(kx-\omega t)}+\frac{d^2 q(z)}{dz^2}e^{i(kx-\omega t)}\right),$$

$$-\omega^2 r(z)e^{i(kx-\omega t)}= C_t^{(s_2)^2}\left(-k^2 r(z)e^{i(kx-\omega t)}+\frac{d^2 r(z)}{dz^2}e^{it(kx-\omega t)}\right),$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2}-\left(k^2-k_l^{(s_1)^2}\right)f(z)=0,$$

$$\frac{d^2 g(z)}{dz^2}-\left(k^2-k_t^{(s_1)^2}\right)g(z)=0,$$

$$\frac{d^2 q(z)}{dz^2}-\left(k^2-k_l^{(s_2)^2}\right)q(z)=0,$$

$$\frac{d^2 r(z)}{dz^2}-\left(k^2-k_t^{(s_2)^2}\right)r(z)=0,$$

где

$$k_l^{(s_1)^2}=\omega^2\Big/C_l^{(s_1)^2}, \quad k_t^{(s_1)^2}=\omega^2\Big/C_t^{(s_1)^2}, \quad k_l^{(s_2)^2}=\omega^2\Big/C_l^{(s_2)^2}, \quad k_t^{(s_2)^2}=\omega^2\Big/C_t^{(s_2)^2}.$$

$$f(z)=A_1 e^{-\sqrt{k^2-k_l^{(s_1)^2}}z}, \; g(z)=A_2 e^{-\sqrt{k^2-k_t^{(s_1)^2}}z}, \quad q(z)=B_1 e^{\sqrt{k^2-k_l^{(s_2)^2}}z}, \; r(z)=B_2 e^{\sqrt{k^2-k_t^{(s_2)^2}}z}. \tag{9}$$

С учетом (9) окончательно для потенциалов получаем:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(s_1)} &= A_1 e^{i(kx-\omega t)-s_l^{(s_1)}z},\\
\psi^{(s_1)} &= A_2 e^{i(kx-\omega t)-s_t^{(s_1)}z},\\
\varphi^{(s_2)} &= B_1 e^{i(kx-\omega t)+s_l^{(s_2)}z},\\
\psi^{(s_2)} &= B_2 e^{i(kx-\omega t)+s_t^{(s_2)}z},
\end{aligned} \tag{10}$$

где $s_l^{(s_1)}=\sqrt{k^2-k_l^{(s_1)^2}}$, $s_t^{(s_1)}=\sqrt{k^2-k_t^{(s_1)^2}}$, $s_l^{(s_2)}=\sqrt{k^2-k_l^{(s_2)^2}}$, $s_t^{(s_2)}=\sqrt{k^2-k_t^{(s_2)^2}}$.

Уравнения (2) и (5) для удобства перепишем через потенциалы:

$$\begin{aligned}
W_x^{(s_1)} &= ikA_1 e^{i(kx-\omega t)-s_l^{(s_1)}z}+ s_t^{(s_1)}A_2 e^{i(kx-\omega t)-s_t^{(s_1)}z},\\
W_z^{(s_1)} &= -s_l^{(s_1)}A_1 e^{i(kx-\omega t)-s_l^{(s_1)}z}+ ikA_2 e^{i(kx-\omega t)-s_t^{(s_1)}z},\\
W_x^{(s_2)} &= ikB_1 e^{i(kx-\omega t)+s_l^{(s_2)}z}- s_t^{(s_2)}B_2 e^{i(kx-\omega t)+s_t^{(s_2)}z},\\
W_z^{(s_2)} &= s_l^{(s_2)}B_1 e^{i(kx-\omega t)+s_l^{(s_2)}z}+ ikB_2 e^{i(kx-\omega t)+s_t^{(s_2)}z}.
\end{aligned} \tag{11}$$

С учетом граничных условий (7) и уравнений (10), (11) получаем систему с четырьмя неизвестными амплитудами A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\begin{cases}
ikA_1+s_t^{(s_1)}A_2-ikB_1+s_t^{(s_2)}B_2=0,\\
s_l^{(s_1)}A_1-ikA_2+s_l^{(s_2)}B_1+ikB_2=0,\\
2iks_l^{(s_1)}\mu_1 A_1+\mu_1\left(s_t^{(s_1)^2}+k^2\right)A_2+ +2iks_l^{(s_2)}\mu_2 B_1-\mu_2\left(s_t^{(s_2)^2}+k^2\right)B_2=0,\\
\left((\lambda_1+2\mu_1)\left(s_l^{(s_1)^2}-k^2\right)+2\mu_1 k^2\right)A_1- -2iks_t^{(s_1)}\mu_1 A_2- -\left((\lambda_2+2\mu_2)\left(s_l^{(s_2)^2}-k^2\right)+2\mu_2 k^2\right)B_1- -2iks_t^{(s_2)}\mu_2 B_2=0.
\end{cases} \tag{12}$$

Условием существования решения системы уравнений (12) является равенство определителя нулю. Исходя из этого условия, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{vmatrix} ik & s_t^{(s_1)} & -ik & s_t^{(s_2)} \\ s_l^{(s_1)} & -ik & s_l^{(s_2)} & ik \\ 2iks_l^{(s_1)}\mu_1 & \mu_1\left({s_t^{(s_1)}}^2+k^2\right) & 2iks_l^{(s_2)}\mu_2 & -\mu_2\left({s_t^{(s_2)}}^2+k^2\right) \\ (\lambda_1+2\mu_1)\left({s_l^{(s_1)}}^2-k^2\right)+2\mu_1k^2 & -2iks_t^{(s_1)}\mu_1 & -\left((\lambda_2+2\mu_2)\left({s_l^{(s_2)}}^2-k^2\right)+2\mu_2k^2\right) & -2iks_t^{(s_2)\mu_2} \end{vmatrix}=0.$$

После некоторых преобразований, при замене всех волновых чисел k, $k_l^{(s_1)}$, $k_t^{(s_1)}$, $k_l^{(s_2)}$, $k_t^{(s_2)}$ через скорости C_{st}, $C_l^{(s_1)}$, $C_l^{(s_2)}$, $C_t^{(s_1)}$, $C_t^{(s_2)}$, получаем уравнение для определения скорости волны Стоунли:

$$\begin{gathered}4\left({C_t^{(s_1)}}^2-\tilde{\rho}{C_t^{(s_2)}}^2\right)^2\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_l^{(s_1)}}^2}}\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_l^{(s_2)}}^2}}\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_t^{(s_1)}}^2}}\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_t^{(s_2)}}^2}}+\\+\left(4\left(\tilde{\rho}{C_t^{(s_2)}}^2+{C_t^{(s_1)}}^2\right)^2+\tilde{\rho}C_{st}^2\left(\tilde{\rho}C_{st}^2-4\tilde{\rho}{C_t^{(s_2)}}^2-4{C_t^{(s_2)}}^2\right)\right)\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_l^{(s_1)}}^2}}\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_t^{(s_1)}}^2}}+\\+\left(4\left(\tilde{\rho}{C_t^{(s_2)}}^2+{C_t^{(s_1)}}^2\right)^2+C_{st}^2\left(C_{st}^2-4{C_t^{(s_2)}}^2-4{C_t^{(s_2)}}^2\right)\right)\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_l^{(s_2)}}^2}}\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_t^{(s_2)}}^2}}+\\+\left(\tilde{\rho}\left(C_{st}^4+16{C_t^{(s_1)}}^2{C_t^{(s_2)}}^2-4C_{st}^2{C_t^{(s_1)}}^2-4C_{st}^2{C_t^{(s_2)}}^2\right)\right)\times\\\times\left(\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_t^{(s_1)}}^2}}\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_l^{(s_2)}}^2}}+\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_t^{(s_2)}}^2}}\sqrt{1-\frac{C_{st}^2}{{C_l^{(s_1)}}^2}}\right)+\\+C_{st}^4(\tilde{\rho}-1)^2+4\left({C_t^{(s_1)}}^2-\tilde{\rho}{C_t^{(s_2)}}^2\right)^2-4C_{st}^2\left(\tilde{\rho}^2{C_t^{(s_2)}}^2-\tilde{\rho}{C_t^{(s_1)}}^2-\tilde{\rho}{C_t^{(s_2)}}^2+{C_t^{(s_1)}}^2\right)=0.\end{gathered}$$

4. Заключение

Получены аналитические решения для смещений, потенциалов векторов продольной и поперечной волн. Выведено дисперсионное уравнение, решение которого позволяет определить наличие волны Стоунли на границе двух пористых сред при существовании положительного корня.

Список литературы

[1] Олинер А.А. Поверхностные акустические волны. Москва: Мир, 1981 (переводной). 390 с.

[2] Лепендин Л.Ф. Акустика. Москва: Высшая школа, 1978. 448 с.

[3] Исакович М.А. Общая акустика. Москва: Наука, 1973. 496 с.

[4] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Москва: Наука, 1973. 343 с.

[5] Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 287 с.

[6] Stoneley R. Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1924. Vol. 106, No. 738. Pp. 416–428. DOI: 10.1098/rspa.1924.0079

[7] Абакумов К.Е., Коновалов Р.С. Распространение акустических волн Стоунли в области границы твердых полупространств при нарушенном акустическом контакте // Известия СПБГЭТУ ЛЭТИ. 2007. № 3. С. 3–7. eLIBRARY ID: 22910878

[8] Ilyashenko A.V. Stoneley waves in a vicinity of the Wiechert condition // International Journal of Dynamics and Control. 2021. Vol. 9, Is. 1. Pp. 30–32. DOI: 10.1007/s40435-020-00625-y

[9] Ji J., Milkereit B. Full Waveform Sonic Data From A Fast Formation. CSEQ National Convention. 2004. URL: https://cseg.ca/assets/files/resources/abstracts/2004/052S0131-Ji_J_Full_Waveform_Sonic_Data.pdf (дата обращения: 24.02.2022).

ISSN 2658–5782

16 (2021), **2**, 79–83

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2021.2.011
DOI: 10.21662/mfs2021.2.011

Received: 3.11.2021
Accepted: 27.01.2022

Derivation of the dispersion equation for determining the Stoneley wave velocity at the boundary of porous media saturated with hydrate and water

Karimova G.R., Rafikova G.R.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

In this paper, we consider the process of the Stoneley wave's propagation along the interface of two media, where the upper medium is represented by sand saturated with water, and the lower one by sand saturated with gas hydrate. In a rectangular coordinate system, the directions of the axes are selected for the case when the plane of the partition is $z = 0$. We assume that the Stoneley wave has vertical polarization, i.e. there is no horizontal transverse displacement. The harmonic wave propagates to a sufficiently remote distance from the source of the explosion and is represented by the sum of longitudinal and transverse waves in each half-space. For description the mathematical model, wave equations, equations for displacement of particles and components of stress tensors are used, which are supplemented by boundary conditions. As a result of finding analytical solutions in the form of a harmonic traveling wave for displacements, potentials, vectors of longitudinal and transverse waves, a dispersion equation for determining the velocity of the Stoneley wave is obtained. With using this equation and experimental values of the velocities of longitudinal and transverse waves in saturated porous media, it is possible to find the Stoneley wave velocity depending on various parameters of the porous medium.

Keywords: surface acoustic waves, stoneley wave, dispersion equation

References

[1] Oliner A.A. Surface acoustic waves. Moscow: Mir, 1981 (translated). 390 pp.

[2] Lependin L.F. Acoustics. Moscow: Higher School, 1978. 448 pp. (in Russian)

[3] Isakovich M.A. General acoustics. Moscow: Nauka, 1973. 496 pp. (in Russian)

[4] Brekhovskikh L.M. Waves in layered media. Moscow: Nauka, 1973. 343 pp. (in Russian)

[5] Viktorov I.A. Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka, 1981. 287 pp. (in Russian)

[6] Stoneley R. Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1924. Vol. 106, No. 738. Pp. 416–428. DOI: 10.1098/rspa.1924.0079

[7] Abakumov K.E., Konovalov R.S. Propagation of acoustic Stoneley waves in the boundary of solid half-spaces with disturbed acoustic contact // Izvestiya SPBGETU LETI. 2007. No. 3. Pp. 3–7. eLIBRARY ID: 22910878

[8] Ilyashenko A.V. Stoneley waves in a vicinity of the Wiechert condition // International Journal of Dynamics and Control. 2021. Vol. 9, Is. 1. Pp. 30–32. DOI: 10.1007/s40435-020-00625-y

[9] Ji J., Milkereit B. Full Waveform Sonic Data From A Fast Formation. CSEQ National Convention. 2004. URL: https://cseg.ca/assets/files/resources/abstracts/2004/052S0131-Ji_J_Full_Waveform_Sonic_Data.pdf (accessed: 24.02.2022).